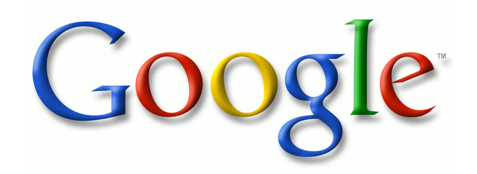

Google

Lehrbuch

der

Differential- und Integralrechnung

von

Louis Navier,

Mitglied der Academie, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, &c.

Mit Zusätzen von Liouville.

Deutsch herausgegeben, und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate begleitet

von

Dr. Theodor Wittstein,

Lehrer an der Königlichen Cadetten-Anstalt, der Königlichen Militair-Academie und der städtischen Handelsschule zu Hannover

---

Erster Band.

Zweite vermehrte Auflage.

Hannover.

Hahn'sche Hofbuchhandlung.

1854.

Schrift und Druck von Fr. Culemann in Hannover.

Vorrede.

Das vorliegende Werk hat in der Gestalt, wie es hier erscheint, seine Entstehung dem Umstande zu verdanken, daß dasselbe dazu ausersehen worden ist, den mathematischen Vorträgen so wie den darauf gestützten Vorlesungen über Baukunst und Maschinenlehre an der hiesigen polytechnischen Schule zum Grunde gelegt zu werden. Ich habe der an mich ergangenen Aufforderung zur Uebernahme dieser Bearbeitung um so lieber entsprochen, als ich Ursache habe zu glauben, daß dieses Werk eines der ersten Techniker der neueren Zeit, bei seiner Eigenthümlichkeit, und trotz der sonst schon vorhandenen Darstellungen der Differential- und Integralrechnung, auch in weiteren Kreisen, denen das Original nicht zugängig ist, werde auf Beifall zu rechnen haben.

Das Original ist unter dem Titel: **Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique par M. Navier etc.** in den Jahren 1840 und 1841 zu Paris erschienen. Zufolge einer kurzen Anzeige im ersten Bande, hat der Verfasser den Text seiner Vorlesungen ursprünglich in lithographirten Blättern seinen Schülern mitgetheilt; nach diesen Blättern ist, nach dem Tode des Verfassers, unter der Ueberwachung von Liouville und Catalan die Herausgabe erfolgt, begleitet von den am Schlusse beigefügten Zusätzen des Ersteren; und, wie man vermuthen darf, dient das Werk noch jetzt den betreffenden Vorlesungen an der polytechnischen Schule zu Paris zur Grundlage.*)

Der Hauptsache nach stellt diese deutsche Ausgabe eine sinngetreue Uebersetzung des Originals dar, bei welcher die Rücksicht vorgewaltet hat, die Klarheit und Faßlichkeit der Darstellung — diesen so bekannten Vorzug aller in Frankreich erscheinenden mathematischen Lehrbücher — auch in der Sprache möglichst wiederzugeben. Nur hie und da

*) Dies hat sich inzwischen geändert. Liouville hält jetzt Vorlesungen am **Collége de France**, und an der polytechnischen Schule trägt Lefébure de Fourcy nach eigenen Heften vor.

habe ich mir erlauben müssen von dem Text des Originals abzuweichen, sei es um einer Betrachtung noch eine nahe liegende Folgerung anzuschließen, oder um durch eine Wendung des Ausdrucks einen Gewinn an Präcision zu erzielen, und dergl. Wie vorsichtig ich indessen hierin gewesen bin, und wie sehr ich gesucht habe, dem Geiste des Buchs nicht zu nahe zu treten, davon werden die unter den Text gesetzten Anmerkungen Zeugniß geben.

Einen Vorzug besitzt übrigens diese Ausgabe gegenüber dem französischen Original in der Correctheit des Drucks, auf welche besondere Sorgfalt verwandt worden ist, während das Original eine nicht geringe Anzahl von Druckfehlern aufzuweisen hat, die dem Anfänger das Verständniß erschweren.

Hannover im November 1847.

Zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage hat im Text verschiedene kleine Zusätze und Erweiterungen erfahren, welche sich mir bei mehrjährigem Gebrauche des Buchs als zweckmäßig ergeben haben. Doch ist dabei, wie schon in der ersten Auflage, überall Sorge getragen worden, daß der Geist des Buchs vollständig gewahrt bleibe. Ein paar Anmerkungen von größerem Umfange, welche, wie ich hoffe, dem Lernenden nicht unwillkommen sein werden, habe ich an den Schluß dieses Bandes gestellt.

Auf die Revision des Drucks ist dieselbe Sorgfalt verwandt worden wie in der ersten Auflage, und Druckfehler von Erheblichkeit dürften nicht zu finden sein.

Hannover im Mai 1854.

Inhalt des ersten Bandes.

Zusätze.

Anmerkungen.

Differential- und Integralrechnung.

I. Functionen im allgemeinen; derivirte Functionen und Differentiale.

§. 1. Die Algebra betrachtet die Beziehungen, welche unter bekannten und unbekannten Größen stattfinden und durch Gleichungeu ausgedrückt werden. Ihr hauptsächlicher Zweck besteht darin, diejenigen bestimmten Werthe für die Unbekannten auszumitteln, welche den gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Im allgemeinen nimmt jede Unbekannte entweder einen einzigen Werth an, wenn die Gleichungen vom ersten Grade sind, oder mehrere von einander verschiedene Werthe, wenn die Gleichungen den ersten Grad übersteigen; diese Werthe sind jedoch immer bestimmte reelle oder imaginäre Größen.

Die Differential- und Integralrechnung dagegen, so wie alle von ihr abhängigen Theile der Mathematik, betrachten diejenigen Beziehungen, welche unter constanten Größen (d. h. solchen, die in der nämlichen Untersuchung stets den nämlichen Werth beibehalten) und veränderlichen Größen bestehen. Diese Beziehungen werden gleichfalls immer durch Gleichungen ausgedrückt, oder können wenigstens so angesehen werden. Indessen da die Anzahl derjenigen Größen, welche als veränderlich gelten sollen, größer ist als die Anzahl der Gleichungen, so können diese Größen eine unendliche

Anzahl von verschiedenen Werthen annehmen, die nur der Bedingung unterworfen sind, den gegebenen Gleichungen Genüge zu leisten.

§. 2. Angenommen, eine vorgelegte Aufgabe liefere n Gleichungen, und enthalte zugleich m Veränderliche, wo m größer als n sei. Da aus n Gleichungen nur n Unbekannte bestimmt werden können, so hat man mithin $m-n$ Veränderliche, deren Werthe willkürlich bleiben. Sobald man aber diese Werthe nach Gutdünken festgesetzt hat, so finden sich auch die n andern Veränderlichen vollständig bestimmt. Dies drückt man kürzer aus, indem man sagt, diese letzteren Veränderlichen seien Functionen der ersteren. Ueberhaupt unterscheidet man in jeder Aufgabe: 1) die unabhängigen Veränderlichen, denen man beliebige Werthe beilegen kann; 2) die abhängigen Veränderlichen, deren Werthe bestimmt sind, sobald man hinsichtlich jener eine Feststellung getroffen hat. Die letzteren sind sodann die Functionen der ersteren.

Man kann nach Gefallen diejenigen unter den Veränderlichen auswählen, welche unabhängige sein sollen. Ist aber die Wahl einmal geschehen, so fordert die Natur der Rechnung, daß in dieser Hinsicht keinerlei Aenderung im Laufe der Operation eintrete; oder zum wenigsten würde eine solche Aenderung besondere Vorsichtsmaßregeln und Umgestaltungen nöthig machen.

Um einen besondern Fall zu betrachten, mögen zwei Veränderliche x und y gegeben sein, unter denen eine einzige Gleichung besteht. Der Werth der einen von diesen beiden Veränderlichen, z. B. von x, kann willkürlich angenommen werden; aber diesem willkürlichen Werthe von x gehört immer ein bestimmter Werth von y zu. So ist x die unabhängige Veränderliche, und y eine Function von x.

Hätte man drei Veränderliche x, y, z, und unter ihnen

eine einzige Gleichung, so könnte man x und y wie unabhängige Veränderliche ansehen, und z würde sodann eine Function von x und y sein. Aber wenn zwei Gleichungen unter den Größen x, y, z beständen, so würde blos die eine Veränderliche x die unabhängige sein können, und von den Veränderlichen y und z wäre jede eine Function von x.

Dies ist leicht auf diejenigen Fälle auszudehnen, wo man eine größere Anzahl von Veränderlichen und von Gleichungen hat.

§. 3. Wenn eine Größe y Function einer anderen Größe x ist (d. h. wenn y einen bestimmten Werth annehmen muß, sobald man dem x einen willkürlichen Werth gibt), so bedient man sich der Bezeichnung

$$y = f(x) \text{ oder } y = F(x) \text{ u. s. w.}$$

Wenn z eine Function der beiden Veränderlichen x und y ist, so schreibt man

$$z = f(x, y) \quad \text{oder} \quad z = F(x, y);$$

und ebenso in anderen Fällen.

Ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus den Veränderlichen x, y, z und beliebigen constanten Größen zusammengesetzt ist, kann also mit $F(x, y, z)$ bezeichnet werden, so daß mithin eine Gleichung unter den Veränderlichen x, y, z dargestellt werden kann durch

$$F(x, y, z) = 0.$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf z aufgelöst, so muß sie die Gestalt $z = f(x, y)$ annehmen.

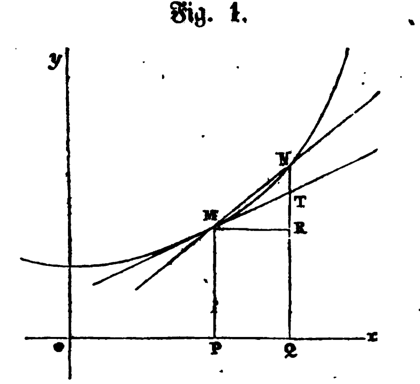
§. 4. Es sei gegeben die Gleichung

$$y = f(x);$$

man lege der unabhängigen Veränderlichen x alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ bei, und betrachte die zugehörigen Werthe, welche die Function y annehmen wird. Die Geometrie bietet das Mittel dar, um die Reihefolge dieser Werthe auf eine einfache Weise zur Anschauung zu

bringen. Man kann nämlich x als Abscisse annehmen, die auf einer gegebenen Achse von einem festen Anfangspunkte aus gezählt wird, und y als zugehörige Ordinate, gezählt auf einer zu der ersteren rechtwinkeligen Achse. Die Werthe von y, welche vermöge der Gleichung $y=f(x)$ denen von x zugehören, werden sodann eine Linie MN, Fig. 1., festlegen, deren Gestalt den Gang der in Rede stehenden Werthe anzeigt. Nothwendig ist es dabei, sich nicht etwa diesen oder jenen besonderen Werth von x nebst dem zugehörigen Werthe von y, sondern vielmehr stets den gesammten Inbegriff der einander entsprechenden Werthe dieser beiden Veränderlichen gegenwärtig zu erhalten.

Fig. 1.



§. 5. Unter den Eigenthümlichkeiten, welche die Function $y=f(x)$ oder die dieselbe zur Darstellung bringende Linie darbieten kann, ist die bemerkenswertheste, die zugleich den hauptsächlichsten Gegenstand der Untersuchung für die Differentialrechnung ausmacht und deren Betrachtung sich in allen physikalischen und technischen Anwendungen dieser Wissenschaft beständig wiederholt, der Grad von Schnelligkeit, mit welchem die Function sich ändert, wenn die unabhängige Veränderliche x ein Aenderung erleidet. Dieser Grad von Schnelligkeit in der Zunahme der Function, sobald man die Veränderliche zunehmen läßt, ist nicht nur bei verschiedenen Functionen verschieden, sondern er ist auch ein anderer bei der nämlichen Function, je nach dem Werthe, von welchem

man die Zunahme der Funktion will ausgehen lassen. Um hierüber zu einem exacten Begriffe zu gelangen, denke man sich dem x einen bestimmten Werth oP beigelegt, welchem ein gleichfalls bestimmter Werth von $y = f(x)$, nämlich PM, entspreche. Es nehme sodann x, von dem ebengenannten Werthe ausgehend, um eine beliebige Größe zu, die mit Δx bezeichnet und in der Figur durch PQ dargestellt werden möge. Die Function y wird in Folge dessen sich im allgemeinen gleichfalls um eine gewisse Größe ändern, die entsprechend durch Δy angedeutet werden mag, so daß man hat

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

oder

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Der neue Werth, welchen die Function y damit angenommen hat, ist in der Figur durch QN dargestellt, und RN gibt die Größe von Δy an, oder von der mit dieser Function vorgegangenen Aenderung. Das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Zunahme der Function zu derjenigen der unabhängigen Veränderlichen, dessen Ausdruck ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

stellt die trigonometrische Tangente des Winkels NMR dar, welchen die Secante MN mit der Achse der x einschließt.

§. 6. Man erkennt leicht, daß das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der natürliche Ausdruck der vorhin angezeigten Eigenthümlichkeit ist, nämlich des Grades von Schnelligkeit, mit welchem die Function y wächst, wenn man die unabhängige Veränderliche x wachsen läßt; denn je größer der Werth dieses Verhältnisses ausfällt, um so beträchtlicher wird auch die Zunahme der Function werden, wenn man die unabhängige Veränderliche um die gegebene Größe Δx zunehmen läßt. Aber

man muß wohl beachten, daß der Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo die Linie MN eine Gerade wird) nicht nur von dem besonderen Werthe des x abhängig ist, d. h. von demjenigen Punkte M auf der Curve, welchen man zum Ausgangspunkte gewählt hat, sondern auch noch von der Größe desjenigen Betrages, welcher der Zunahme Δx beigelegt worden ist. So lange diese Zunahme willkürlich bleibt, ist es auch unmöglich, mit dem in Rede stehenden Verhältinsse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen exacten Begriff zu verbinden, in sofern dieses Verhältniß auf einen bestimmten Punkt der obigen Curve bezogen werden soll; und es wird demnach durchaus nothwendig, eine Uebereinkunft zu treffen, welche hier jede mögliche Unbestimmtheit fern hält.

Um dahin zu gelangen, gehe man von irgend einem Werthe aus, welchen man dem Δx beigelegt hat und welchem ein gewisser Werth von Δy und eine gewisse Richtung der Secante MN entsprechen, und vermindere allmälig den Werth von Δx, dergestalt, daß diese Zunahme zuletzt und als äußerste Gränze zu dem Werthe Null gelange. Die entsprechende Zunahme Δy wird sich in Folge dessen ändern, und im allgemeinen gleichfalls dem Werthe Null immer näher kommen. Der Punkt N wird immer näher an den Punkt M rücken, und die Secante MN immer mehr das Bestreben haben, mit der im Punkte M an die Curve gelegten Tangente MT zusammenzufallen. Was das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der beiden Zunahmen betrifft, so wird sich dieses gleichfalls einer gewissen Gränze immer mehr nähern, welche durch die trigonometrische Tangente des Winkels TMR dargestellt wird, den die Tangente MT mit der Achse der Abscissen einschließt.

Wenn die Veränderung Δx negativ wäre und mithin

die Abscisse x verkleinerte, anstatt dieselbe zu vergrößern, so könnte man noch die nämlichen Bemerkungen machen. So wie der absolute Werth dieser Veränderung kleiner und kleiner vorausgesetzt würde und sich immer mehr der Null näherte, so würde die entsprechende Veränderung Δy der Ordinate gleichfalls im allgemeinen der Null immer näher kommen. Die Secante, durch zwei den Abscissen x und $x + \Delta x$ entsprechende Punkte der Curve gelegt, würde immer mehr sich bestreben mit der Tangente zusammenzufallen, welche durch den der Abscisse x entsprechenden Punkt M führt. Der Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der beiden Veränderungen endlich würde sich immer mehr der obengenannten Gränze nähern, nämlich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welcher zwischen der Tangente der Curve und der Abscissenachse enthalten ist.

§. 7. Aus dem Bisherigen erkennt man leicht, daß, wenn die Zunahme Δx und folglich auch die entsprechende Zunahme Δy ohne Aufhören abnehmen und dem Werthe Null immer näher kommen, das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dieser Zunahmen sich im allgemeinen einer Gränze nähert, welche einen endlichen und bestimmten Werth besitzt. Derjenige Werth des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, welcher dieser Gränze angehört, muß nun als das wahre und exacte Maß der im §. 5. zur Sprache gebrachten Eigenthümlichkeit angesehen werden, nämlich als das Maß der Schnelligkeit, mit welcher die Function sich ändert, wenn man die unabhängige Veränderliche sich ändern läßt; denn in dem Ausdrucke für diesen Werth bleibt nichts mehr willkürlich, und er ist jetzt weder von den absoluten Werthen der beiden Zunahmen Δx und Δy, noch von der Gestaltung der Curve in gewissen endlichen Abständen

von dem Punkte M, nach der einen oder der andern Seite dieses Punktes, abhängig. Er hängt einzig und allein von der Richtung der Curve in diesem Punkte ab, d. h. von der Neigung der Tangente gegen die Abscissenachse. Das auf solche Weise bestimmte Verhältniß fällt mit demjenigen zusammen, was Newton die Fluxion der Ordinate nannte.

Was die Methode betrifft, um in jedem besondern Falle den in Rede stehenden Werth zu finden, so hat man offenbar nur nöthig, den allgemeinen Ausdruck zu betrachten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

und nachzusehen, welcher Gränze dieser Ausdruck immer näher kommt, je mehr Δx kleinere und kleinere Werthe annimmt und sich damit dem Werthe Null immer mehr nähert. Diese Gränze, welche man auch mit Hülfe des Zeichens lim (Gränze, lat. limes) ausdrücken kann durch

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wird eine gewisse Function der unabhängigen Veränderlichen x sein, deren nähere Beschaffenheit von derjenigen der gegebenen Function $f(x)$ abhängt.

§. 8. Es ist nothwendig, noch insbesondere auf die Zunahme Δx der unabhängigen Veränderlichen die Aufmerksamkeit zu richten, während dieselbe auf die angegebene Weise sich ohne Aufhören der Null nähert, oder einen unbestimmten Werth besitzt, der kleiner ist als jede noch so kleine gegebene Zahl. Diese Zunahme wird alsdann unendlich klein genannt. Die entsprechende Zunahme Δy hat im allgemeinen gleichfalls einen unbestimmten Werth, kleiner als jede noch so kleine gegebene Zahl, oder einen unendlich kleinen Werth, der zu Δx in einem bestimmten Verhältnisse steht. Von diesem Verhältnisse aber kann man sagen, daß es sich ohne Aufhören

derjenigen Gränze nähere, von welcher oben die Rede gewesen ist, oder daß es von dieser Gränze um eine Größe verschieden sei, welche kleiner ist als jede noch so kleine gegebene Zahl.

Bei der Wichtigkeit der Gränze, welche hier betrachtet wird, hat man es für nöthig erachtet, besondere Namen und Zeichen für dieselbe einzuführen. Die Veränderungen Δx und Δy werden im allgemeinen die Differenzen der Veränderlichen x und der Function y genannt, indem man Δx wie die Differenz zweier auf einander folgenden Werthe von x, und Δy wie die Differenz der beiden entsprechenden Werthe von y ansieht. Aber sobald Δx und Δy als unendlich klein angesehen werden, so bekommen diese Differenzen den Namen Differentiale der Veränderlichen x und y, und zur Unterscheidung setzt man für das griechische Δ das lateinische d an die Stelle, und schreibt dx und dy. Die Gränze, welcher das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzen, oder das Differenzverhältniß (der Differenzquotient), immer näher kommt, während Δx sich mehr und mehr der Null nähert, wird mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet und heißt das Differentialverhältniß oder der Differentialquotient. Seine Entstehung wird also durch die Gleichung ausgesprochen

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lagrange nannte diejenige Function von x, welche den Werth der Gränze $\frac{dy}{dx}$ angibt, die derivirte (abgeleitete) Function, weil sie durch bestimmte Operationen aus der primitiven (ursprünglichen) Function $f(x)$ abgeleitet wird. Er bezeichnet die derivirte Funktion von y oder $f(x)$ mit y' oder $f'(x)$. Diese Benennungen und Bezeichnungen sind gleichfalls von häufigem Gebrauch.

§. 9. Man wird bemerken, daß der Abstand RN, Fig. 1., welcher die Differenz Δy darstellt, sich aus den beiden Theilen RT und TN zusammensetzt, welche beide das Bestreben haben Null zu werden, während Δx der Null immer näher kommt. Da der Winkel TMR zu seiner trigonometrischen Tangente die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nämlich $\frac{dy}{dx}$ hat, so ist $RT = \frac{dy}{dx}\,\Delta x$. Was ferner die Linie TN betrifft, so kann man dieselbe, da sie zugleich mit Δx zu Null wird, im allgemeinen durch $\omega \Delta x$ darstellen, wo ω eine Function von x und Δx bezeichnet. Man hat also allgemein

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \omega\right) \Delta x, \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \omega.$$

So lange nun die Zunahmen Δx und Δy angebbare Werthe beibehalten, so klein man diese auch annehmen mag, so behält die Größe ω gleichfalls einen solchen Werth. Aber sobald man Δx verschwinden läßt, so wird $\omega = 0$, weil in diesem Falle, vermöge der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ übergeht in $\frac{dy}{dx}$. Aus der ersten der beiden aufgestellten Gleichungen zieht man sodann aber, indem man dx statt Δx und dy statt Δy schreibt

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

d. h. das Differential der Function y ist gleich dem Producte aus dem Differential dx der unabhängigen Veränderlichen und der Gränze $\frac{dy}{dx}$ des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der einander zugehörigen Differenzen der beiden Veränderlichen. In Folge dieser Gleichung hat man die Gränze $\frac{dy}{dx}$, welche hier als Coefficient auftritt, auch den Differential-Coefficienten der Function genannt.

Der zuletzt angegebene Schluß ergibt sich übrigens schon mit völliger Evidenz aus der Natur der hier eingeführten Bezeichnung, welche die Mathematiker nach dem Vorgange von Leibnitz, dem Erfinder der Differentialrechnung, allgemein in den Gebrauch genommen haben.

§. 10. Wenn man das Vorhergehende zusammenfaßt, und nun eine beliebige Function y von einer einzigen unabhängigen Veränderlichen x betrachtet, so kann man die Veränderliche x allmälig von $-\infty$ bis $+\infty$ dergestalt wachsen lassen, daß jeder der Werthe, welche diese Veränderliche dabei successiv annimmt, den nächstvorhergehenden um den unendlich kleinen Betrag dx übertrifft, d. h. um einen Betrag, welcher kleiner ist als jede angebbare Größe. Dieser Betrag dx, welcher die Differenz zweier auf einander folgenden Werthe von x ausdrückt, kann nach Belieben als constant oder als veränderlich in der ganzen Ausdehnung der Reihe angenommen werden. Aber wenn es sich wie hier um eine unabhängige Veränderliche handelt, so ist es einfacher und dem Geiste der Differentialrechnung angemessener, das Differential dx als constant anzusehen. Wenn man nun auf die angegebene Weise von einem Werthe a von x durch eine unendliche Anzahl von Zwischengliedern, welche von einander durch das constante Intervall dx getrennt werden, zu einem andern Werthe A übergeht, so gelangt man gleichfalls von dem Werthe b der Function y, welcher dem Werthe a von x entspricht, zu dem Werthe B, entsprechend dem Werthe A. Ueberall wo x um das Differential dx wächst, ändert sich y um das entsprechende Differential dy. Dieses letztere Differential, welches positiv oder negativ werden kann, hängt überhaupt, wenn x und dx gegeben sind, noch von der Natur der gegebenen Funktion ab. Man lernt seinen Werth kennen, wenn man den Werth der Gränze $\frac{dy}{dx}$

$= \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ als Function von x bestimmt hat; denn als-dann ist immer $dy = \frac{dy}{dx} dx$. Diese Gränze $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist zugleich der Ausdruck und das Maß für die Schnelligkeit, mit welcher sich der Werth der Function an den verschiedenen Stellen ihres Laufes ändert, wenn die unabhängige Veränderliche selbst sich ändert.

§. 11. Es bleibt hier nur noch eine Bemerkung hinzuzufügen, deren Evidenz man sofort erkennen wird. Nämlich die Differentiale, welche oben durch dx und dy bezeichnet worden sind, stellen immer Größen von derselben Art dar wie diejenigen, welche durch die Veränderlichen x und y angezeigt werden. So wenn in der Geometrie x eine Linie, eine Fläche, einen Körperraum bedeutet, so bezeichnet das Differential dx gleichfalls eine Linie, eine Fläche oder einen Körperraum. Die Differentiale sind Größen, welche für kleiner angesehen werden müssen als jede angebbare Größe;*) aber diese Annahme ändert nichts in der Natur dieser Grö-

*) Zu näherer Erläuterung über die Natur des Unendlichkleinen mögen hier die folgenden beiden Bemerkungen Platz finden.

„Eine unendlich kleine Größe ist nicht eine Größe gleich Null, sondern eine Größe, welche Null zur Gränze hat; und diese einfache Unterscheidung verbannt jede Schwierigkeit aus den Grundbegriffen der Differentialrechnung." Carnot, Geom. d. Stellung I. §. 19.

„Die unendlich große wie die unendlich kleine Zahl ist nie im Sein vorhanden, sondern immer nur im Werden begriffen. Die Existenz derselben kann aber, so lange wir eine Stetigkeit der Größen zulassen, nicht bezweifelt werden, wenn uns auch der Ziffern-Ausdruck fehlt, der dieselben im Sein vorstellte." Ohm, Geist der mathem. Analysis II. S. 67.

ßen, sondern vielmehr dx und dy sind immer homogen mit x und y, d. h. sie enthalten immer die nämliche Anzahl von Dimensionen, wie die Einheit, durch welche die Werthe dieser Veränderlichen ausgedrückt worden sind.

II. Differentiation der einfachen Functionen von einer Veränderlichen.

---

§. 12. Eine Function $y = f(x)$ differentiiren heißt den Ausdruck ihres Differentials dy aufsuchen, oder der unendlich kleinen Aenderung, welche y erleidet, wenn die unabhängige Veränderliche x um ihr Differential dx wächst. Nach dem oben Gesagten reducirt sich diese Aufsuchung auf die Aufstellung des Verhältnisses

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

und die Bestimmung seiner Gränze

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

für verschwindende Werthe von Δx. Denn alsdann hat man für das gesuchte Differential

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

Es gibt eine kleine Anzahl von einfachen oder elementaren Functionen, für welche der Ausdruck der in Rede stehenden Gränze eine besondere Untersuchung verlangt. Sobald diese erledigt ist, so bietet jede willkürlich gewählte Function, welche immer aus jenen ersteren zusammengesetzt sein muß, keine Schwierigkeiten weiter dar.

§. 13. Diese einfachen Functionen sind:

1) die Function x^m, d. h. die Veränderliche erhoben zu einer Potenz, deren Exponent m jede beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene oder irrationale constante Zahl bezeichnen kann.

2) Die logarithmische Function $\log x$. Man versteht bekanntlich unter $\log x$ den Exponenten derjenigen Potenz, zu welcher man eine gewisse constante Zahl, die Basis des Systems, erheben muß, um die Zahl x zu erhalten; bezeichnet man also diese Basis mit a, so hat man immer $a^{\log x} = x$. Demnach muß mit der Function $\log x$ zugleich auch die Basis gegeben sein, zu welcher der Logarithmus gehört.

3) Die Exponentialfunction a_x, in welcher die Veränderliche als Exponent einer Potenz erscheint, zu welcher eine gegebene constante Zahl erhoben werden soll.

4) Die trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$, in denen x einen Bogen bezeichnet, welcher von einem beliebigen festen Anfangspunkte aus auf der Peripherie eines Kreises gezählt wird, dessen Halbmesser der Einheit gleich ist.

5) Die Kreisfunctionen $\operatorname{arc}\sin x$ und $\operatorname{arc}\cos x$. In dieser Bezeichnung bedeutet x resp. einen Sinus oder Cosinus, und unter $\operatorname{arc}\sin x$ oder $\operatorname{arc}\cos x$ versteht man einen mit der Einheit als Halbmesser construirten Kreisbogen, dessen Sinus oder Cosinus resp. gleich x ist. Oder man hat immer $\sin(\operatorname{arc}\sin x) = x$ und $\cos(\operatorname{arc}\cos x) = x$.

Diese verschiedenen Functionen werden jetzt der Reihe nach betrachtet werden.*)

1. Function $y = x^m$, wo m eine Constante bezeichnet.

§. 14. Als einfachsten Fall kann man denjenigen vor-

*) Die Kreisfunctionen kommen jedoch erst im folgenden Abschnitte §. 35. zur Betrachtung.

anstellen, wo der Exponent m eine positive ganze Zahl ist. Man findet alsdann sehr leicht das Differential der Function y. Die allgemeine Formel des §. 12 gibt nämlich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x},$$

und entwickelt man den Ausdruck $(x+\Delta x)^m$ nach der Binomialformel von Newton, welche in den Elementen der Arithmetik für den Fall, wo der Exponent m eine positive ganze Zahl ist, pflegt bewiesen zu werden, so hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2}\Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} (\Delta x)^2$$
$$+ \ldots\ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Wenn nun Δx seiner Gränze Null immer näher kommt, so werden alle Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung, mit Ausnahme des ersten, gleichfalls zu Null werden. Die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, d. h. das Differentialverhältniß oder die derivirte Function von x^m, wird also

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

und folglich wird das Differential dieser Function selbst

$$dy = mx^{m-1}dx.$$

§. 15. Diese Formel liefert gleichfalls den Ausdruck für das gesuchte Differential, welchen Werth auch die Constante m haben mag. Um dies zu beweisen, setze man $(x+\Delta x)^m = \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m x^m$, wodurch der Ausdruck für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Gestalt annimmt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{m-1}.$$

Zur Abkürzung setze man $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$. Man erkennt alsdann, daß es sich nur noch um die Bestimmung der Gränze

$$\lim \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}$$

handelt, während α sich dem Werthe Null nähert. Oder vielmehr wenn man annimmt

$$(1+\alpha)^m = 1+\beta,$$

wo β eine zugleich mit α verschwindende Zahl bezeichnet, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^{m-1},$$

und es ist jetzt nur noch um die Bestimmung der Gränze $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ zu thun, nach deren Feststellung man sofort $\frac{dy}{dx}$ wird angeben können.

§. 16. Um dahin zu gelangen, betrachte man zuvor den Ausdruck

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und suche seine Gränze unter der Voraussetzung, daß α dem Werthe Null immer näher komme. Da α angesehen werden kann wie eine Zahl, welche allmälig Werthe annimmt, die kleiner sind als jede noch so kleine gegebene Zahl, so kann man $\alpha = \frac{1}{u}$ setzen, wo u angesehen werden kann wie eine ganze Zahl, welche größer wird, als jede noch so große gegebene Zahl. Alsdann geht der in Rede stehende Ausdruck über in

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u,$$

und entwickelt man denselben nach der Binomialformel, so hat man

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = 1 + u.\frac{1}{u} + \frac{u(u-1)}{2}.\frac{1}{u^2} + \frac{u(u-1)(-2)}{2.\ 3}\frac{1}{u^3} + .$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{u}}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)}{2\ .\ 3}$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)\left(1-\frac{3}{u}\right)}{2\ .\ 3\ .\ 4} + \ldots$$

Aber wenn u ohne Aufhören wächst, so werden die Zähler der einzelnen Brüche sämmtlich immer näher der Einheit kommen. Folglich hat man unter dieser Voraussetzung

$$\lim\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$$

und diese Reihe ist mithin zugleich die Gränze des obigen Ausdrucks $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, wenn α immer näher an Null kommt.

Die gefundene Reihe ist augenscheinlich convergent, d. h. je mehr Glieder man von derselben zu einer Summe vereinigt, desto mehr nähern sich die Resultate einer gewissen irrationalen Zahl, welche nicht überschritten wird. Denn da alle Glieder positiv sind, so wird ihre Summe wachsen, wenn man allmälig mehr und mehr Glieder in die Rechnung hineinzieht; auch lassen sich leicht zwei Gränzen angeben, zwischen denen diese Summe enthalten sein muß. Ihr Werth beträgt nämlich mehr als 2, und weniger als 2 vermehrt um die geometrische Progression $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ und da die Summe dieser Progression, wenn man sie ins Unendliche fortsetzt, der Einheit gleich ist, so liegt der Werth jener Reihe zwischen den Zahlen 2 und 3. Die Berechnung selbst ist leicht, und gibt auf sieben Decimalstellen

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818.$$

Man pflegt diese Zahl, welche von häufigem Gebrauche ist, mit dem Buchstaben e zu bezeichnen.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich also, daß, wenn α eine Zahl bezeichnet, welche dem Werthe Null immer näher kommt, man jederzeit hat

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

wo

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818;$$

und man kann bemerken, daß dieses Resultat auch noch dann gilt, wenn α negativ ist. Denn man kann setzen

$$1 - \alpha = \frac{1}{1+\varepsilon},$$

wo ε eine zugleich mit α verschwindende Zahl bedeutet, und hat sodann

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}(1+\varepsilon);$$

da aber die rechte Seite dieser Gleichung die Zahl e zur Gränze hat, so wird dasselbe auch von der linken Seite gelten.

§. 17. Kehrt man nun zu der Gleichung des §. 15

$$(1+\alpha)^m = 1 + \beta$$

zurück, und nimmt auf beiden Seiten derselben den Logarithmus in einem beliebigen Systeme, so hat man

$$m \log(1+\alpha) = \log(1+\beta), \text{ woraus } \frac{\log(1+\beta)}{\log(1+\alpha)} = m.$$

Aber wenn α und β sich ohne Aufhören der Null nähern, so ist nach dem vorigen Paragraphen

$$\lim (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad \lim (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} = e,$$

folglich

$$\lim \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} = \log e, \quad \lim \frac{\log(1+\beta)}{\beta} = \log e$$

und daraus

$$\lim \left\{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\log(1+\alpha)}{\log(1+\beta)}\right\} = 1$$

und vermöge des Vorigen

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = m.$$

Man findet also jetzt allgemein für das Differentialverhältniß der Function $y = x^m$ den Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

wie schon im §. 14 für den Fall eines positiven ganzen Exponenten nachgewiesen worden ist; und daraus schließt man

$$d(x^m) = mx^{m-1}\, dx.$$

§. 18. Als besondere Fälle, welche in den Anwendungen häufig vorkommen, mögen hier die folgenden beiden noch hervorgehoben werden.

1) Wenn $m = \frac{1}{2}$ ist; so gibt die vorstehende Formel

$$d.\sqrt{x} = d\,(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

2) Wenn $m = -1$ ist, so gibt dieselbe

$$d.\frac{1}{x} = d\,(x^{-1}) = -\frac{dx}{x^2}.$$

2) Logarithmische Function $y = \log x$.

§. 19. Die allgemeine Formel des §. 12 gibt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Setzt man wiederum $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}$$

und da der zweite Factor auf der rechten Seite dieser Gleichung, nach §. 17, für unendlich abnehmende Werthe von α den Werth log e zu seiner Gränze hat, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e, \text{ und } dy = \frac{dx}{x} \log e.$$

§. 20. Die Basis des logarithmischen Systems ist hier noch völlig unbestimmt geblieben. Nimmt man ein System an, dessen Basis die Zahl e ist, so hat man $\log e = 1$, folglich

$$d.\log x = \frac{dx}{x}.$$

Die Logarithmen dieses letztern Systems werden natürliche Logarithmen, oder auch, nach den Namen des Erfinders der Logarithmen, Neper'sche Logarithmen genannt (seltener hyperbolische Logarithmen, wegen gewisser Beziehungen zu der Hyperbel, s. §. 313), und sind in den höheren Theilen der Mathematik von allgemeiner Anwendung. Sie sollen hier durch den Buchstaben l bezeichnet werden, zur Unterscheidung von den Logarithmen in einem beliebigen Systeme, für welche die Bezeichnung log beibehalten werden mag. Man hat also

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{\log e}{x} \quad \text{und} \quad \frac{d.lx}{dx} = \frac{1}{x}.$$

3. Exponentialfunction $y = a^x$, wo a eine Constante bezeichnet.

§. 21. Man erhält hier nach der Formel des §. 12

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} a^x.$$

Setzt man $\Delta x = \alpha$, so kann man schreiben

$$a^\alpha = 1 + \beta,$$

wo β eine Zahl bedeutet, welche sich zugleich mit α ohne Aufhören der Null nähert. Man hat also jetzt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha} . a^x,$$

und es ist hier nur noch um die Bestimmung der Gränze $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ zu thun, während α und β zu Null werden.

Aber aus der obigen Gleichung

$$a^\alpha = 1 + \beta$$

erhält man durch Uebergang zu den Logarithmen, diese in einem beliebigen Systeme genommen,

$$\alpha \log a = \log (1 + \beta),$$

und daraus

$$\frac{\alpha}{\beta} \log a = \frac{\log (1 + \beta)}{\beta}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat nach §. 17 für unendlich abnehmende Werthe von β die Gränze $\log e$; folglich wird

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\log a}{\log e},$$

und mithin endlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^x \quad \text{und} \quad d.a^x = \frac{\log a}{\log e} a^x dx.$$

§. 22. Wenn die Logarithmen natürliche sind, also $\log e = 1$, so hat man einfacher

$$d.a^x = la.a^x dx;$$

und wenn außerdem die Constante $a = e$ ist (s. §. 16),

$$d.e^x = e^x dx.$$

Die Function e^x hat demnach die Eigenschaft, sich durch Differentiation wieder zu erzeugen, d. h. ihr Differentialverhältniß oder ihre derivirte Function stimmt mit der Function selbst überein.

Weiter unten, §. 35, wird gezeigt werden, wie das Differential von a^x auch unmittelbar aus demjenigen von $\log x$ hergeleitet werden kann.

4. Trigonometrische Functionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

§. 23. Aus der Function

$$y = \sin x$$

erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cos(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

mit Hülfe einer bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi).$$

Wenn nun Δx sich ohne Aufhören der Null nähert, so kommt das Verhältniß des $\sin\frac{1}{2}\Delta x$ zum Bogen $\frac{1}{2}\Delta x$ der Einheit immer näher, so daß man hat

$$\lim \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1.^{*})$$

Die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird also

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \text{woraus} \quad d.\sin x = \cos x.dx.$$

Ebenso aus der Function

$$y = \cos x$$

erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)$$

wobei die trigonometrische Formel

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)$$

---

*) Denn da für jeden spitzen Winkel $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ ist, so hat man auch

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Von diesen drei Ausdrücken ist aber der erste gleich der Einheit; der letzte, welcher mit $\cos\alpha$ gleichbedeutend ist, hat für unendlich abnehmende Werthe von α die Einheit zur Gränze; folglich muß unter gleicher Voraussetzung auch $\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ sein.

zur Anwendung kommt. Daraus aber folgt wie oben

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \quad \text{woraus} \quad d.\cos x = -\sin x\,.\,dx.$$

Also die derivirte Function von sin x ist cos x; dagegen diejenige von cos x ist $-$ sin x. Wie man übrigens, wenn das Differential von sin x bekannt ist, daraus unmittelbar dasjenige von cos x herleiten kann, wird sich später, §. 33, zeigen.

III. Differentiation der zusammengesetzten Functionen, oder der Functionen von Functionen einer Veränderlichen.

---

§. 24. Die bisher betrachteten Functionen müssen wie die einfachen Elemente angesehen werden, in welche alle analytischen Ausdrücke aufgelöst werden können (so lange man wenigstens diejenigen Fälle noch ausschließt, welche erst auf dem Boden der Integralrechnung selbständig zu Stande kommen). Denn jede irgendwie zusammengesetzte Formel ist stets durch Combinirung der in Rede stehenden Functionen gebildet, entweder mit Hülfe derjenigen Zeichen, welche die gewöhnlichen algebraischen Operationen anzeigen, oder durch den Gebrauch der Bezeichnungen log, sin, cos, welche man wie Bezeichnungen für andere mehr verwickelte Operationen (sogenannte transcendente Operationen) ansehen kann, deren Ausführung durch die Construction von Tafeln erleichtert wird. Die directe Aufsuchung der Differential-Ausdrücke für die drei Functionen x^m, log x und sin x mußte zuerst erledigt werden; man kann darauf die Bestimmung der beiden Größen $d.a^x$ und $d.\cos x$ zurückführen, welche oben besonders abgeleitet worden sind. Was aber

die übrigen mehr zusammengesetzten Functionen betrifft, so lassen sich leichte Regeln aufstellen, durch deren Hülfe man die Aufsuchung ihres Differentials zurückführt auf die Aufsuchung des Differentials einer einfacheren Function, welche in der ersteren enthalten ist. Mit Anwendung dieser Regeln gelangt man allmälig zu den letzten Elementen, in welche die gegebene Function aufgelöst werden kann, und in denen man immer (mit Ausnahme gewisser Ausdrücke in der Integralrechnung) eine von den einfachen Functionen wieder erkennen wird, welche den Gegenstand des vorhergehenden Abschnitts ausgemacht haben. Kann man also diese Functionen differentiiren, so hat die Differentiation aller anderen Functionen keine Schwierigkeit.

Um die angezeigten Regeln aufzufinden, sei Erstens

$$y = f(v),$$

wo v eine beliebige Function von x sein mag. Man sucht das Differential der Veränderlichen y, welche hier den Namen der Function einer Function von der unabhängigen Veränderlichen x führt; d. h. man sucht die unendlich kleine Aenderung, welche y erfährt, wenn x um die unendlich kleine Größe dx zunimmt. Vermöge der Grundgleichung des §. 12 hat man, wenn Δv diejenige Zunahme der Function v bezeichnet, welche der Zunahme Δx von x entspricht,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta x},$$

wofür man schreiben kann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Wenn nun Δx sich ohne Aufhören der Null nähert, so wird nach §. 12

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v} = \frac{dy}{dv}, \quad \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

Functionen

The equation Dy

the x shews that th

upon the change

Let us assign a p

as $v = f$

then Dy_v has the

dividing by Dx

$$\frac{Dy_x}{Dx} = f(v\cdot$$

$$\frac{Dy_x}{Dx} = f(v+$$

now assign to Dx

& Dx becomes dx

$$\frac{dy_x}{dx} = f(v+$$

Now as to the mean

$$f(v+dv) - f(v$$

as the increment

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

of dx

but whatever the f

dx, or d f

no ~~dx~~ infin^l increment

be other than infin

therefore $\frac{dy_x}{dx} = d$

$y = f v.$ $v =$

$$\frac{dy_x}{dx} = \frac{df v}{dv} \therefore \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy_x dv_x}{dv_x dx} = \frac{d f v}{dv} \cdot \frac{d}{d}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f v}{dv} \cdot \frac{d}{d}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$f x$

$= \frac{d f x}{dx}$

$y = \phi(v)$, v :

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{woraus} \quad dy = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx.$$

Man erhält also das gesuchte Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$, indem man zuerst das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dv}$ so nimmt, als wenn v die unabhängige Veränderliche wäre, und sodann das Resultat mit $\frac{dv}{dx}$ multiplicirt, d. h. mit dem Differentialverhältniß der Function v in Bezug auf die unabhängige Veränderliche x.

Wegen $\frac{dv}{dx} dx = dv$ (nach §. 9) kann man statt der Gleichung $dy = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx$ auch schreiben $dy = \frac{dy}{dv} dv$, deren Form die nämliche ist, als wenn v die unabhängige Veränderliche wäre. Setzt man z. B. $y = v^m$ und nimmt Bezug auf die Formel des §. 17, so erhält man $d \cdot v^m = mv^{m-1} dv$, wie sonst auch die Function v beschaffen sein mag.

§. 25. Wenn gegeben wäre

$$y = f(p),$$

wo p eine Function von v, und v eine Function von x bezeichnen mag, so würde man nach der vorhergehenden Regel zuerst finden $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$. Aber nach der nämlichen Regel würde auch sein $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$, folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dp} \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dx}, \quad \text{und} \quad dy = \frac{dy}{dp} \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dx} dx.$$

Und ebenso in zusammengesetzteren Fällen.

§. 26. Es sei Zweitens

$$y = f(u, v),$$

wo u und v zwei Veränderliche bezeichnen, welche selbst

wieder Functionen von der unabhängigen Veränderlichen x sind; man sucht das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ der Veränderlichen y, welche hier eine Function von mehreren Functionen von der unabhängigen Veränderlichen x ist. Die Differenz Δy oder $f(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - f(u,\ v)$ ist identisch gleich dem Ausdrucke

$$f(u+\Delta u, v) - f(u,v) + f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v).$$

Folglich wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v) - f(u,v)}{\Delta x} + \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u+\Delta u, v)}{\Delta x}$$

Was die Gränze dieses Ausdrucks betrifft, während Δx unendlich abnimmt, so ist die Gränze des ersten Gliedes, nach dem Vorhergehenden, offenbar $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. Die Gränze des zweiten Gliedes würde, wenn Δu constant wäre, $\frac{d.f(u+\Delta u, v)}{dv}\frac{dv}{dx}$; aber da Δu zugleich mit Δx verschwindet, so ist dieser letzte Ausdruck einerlei mit $\frac{d.f(u,v)}{dv}\frac{dv}{dx}$, oder mit $\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}$. Also hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}, \text{ und } dy = \left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

Das gesuchte Differentialverhältniß ist also gleich der Summe der beiden Differentialverhältnisse in Bezug auf die beiden Functionen u und v einzeln genommen, d. h. derjenigen Differentialverhältnisse, welche man erhält, wenn man das eine Mal u allein, das andere Mal v allein als veränderlich ansieht.

§. 27. Wenn gegeben wäre

$$y = f(t,u,v),$$

wo die drei Veränderlichen t, u, v Functionen der unabhängigen Veränderlichen x sind, so könnte man auf ähnliche Weise schließen. Man würde für Δy den damit identischen Ausdruck

$$f(t+\Delta t,u,v,)-f(t,u,v)+f(t+\Delta t,u+\Delta u,v)-f(t+\Delta t,u,v)+$$
$$f(t+\Delta t,u+\Delta u,v+\Delta v)-f(t+\Delta t,u+\Delta u,v)$$

an die Stelle setzen u. s. f., und endlich zu dem Resultate gelangen

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx},$$

woraus

$$dy=\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

Ebenso verfährt man, wenn eine größere Anzahl von Functionen da ist, die von der Veränderlichen x abhängen.

Gebrauch der vorhergehenden Regeln.

§. 28. Die gegebenen Regeln in Verbindung mit den Resultaten, welche der II. Abschnitt enthält, reichen vollständig aus, um das Differential eines jeden beliebigen analytischen Ausdrucks zu finden. Die nachfolgenden Bemerkungen werden indessen noch dazu dienen können, diese Art von Rechnungen zu erleichtern.

Wenn eine Function aus einer andern Function nebst einer Constanten zusammengesetzt ist, sei es durch Addition, Subtraction oder Multiplication, so reicht der bloße Begriff des Differentials hin, um das Resultat sofort anzugeben. So

$y=a+v$ gibt $dy=dv$

$y=a-v$ $\quad dy=-dv$

$y=av$ $\quad dy=adv.$

Außerdem hat man nach §. 24

$$d.v^m=mv^{m-1}.dv,$$

wo m eine beliebige Constante bezeichnet,

§. 29. Wenn eine Function aus mehreren Functionen durch Addition, Multiplication oder Division zusammengesetzt ist, so erhält man das Resultat durch die Regel der §§. 26 und 27. Bezeichnen nämlich wieder t, u, v Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, so findet man, daß

$$y = u + v \quad \text{gibt} \quad dy = du + dv$$
$$y = uv \qquad dy = vdu + udv$$
$$y = tuv \qquad dy = uvdt + tvdu + tudv$$
$$y = \frac{u}{v} \qquad dy = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Um diesen letzten Ausdruck zu erhalten, wird man beachten müssen, daß $d.\frac{1}{v} = d.v^{-1} = -\frac{dv}{v^2}$.

Verlangt man, daß das Differential dy ausgedrückt werde durch das Differential dx der unabhängigen Veränderlichen, so ist für dt, du, dv resp. an die Stelle zu setzen $\frac{dt}{dx}dx$, $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{dv}{dx}dx$.

§. 30. Eine besondere Beachtung verdienen diejenigen Zusammensetzungen, zu denen die logarithmischen Functionen, die Exponentialfunctionen und die trigonometrischen Functionen nebst den Kreisfunctionen den Anlaß geben, und die man mit einem gemeinschaftlichen Namen transcendente Functionen nennt.

Der Weg zur Auffindung des Differentials besteht immer darin, daß man die gegebene Function unter Formen zu bringen sucht, ähnlich denen der allgemeinen Functionen, welche in den §§. 24 bis 27 betrachtet worden sind; daß man mithin diejenigen Größen heraushebt, welche man als Functionen von einander betrachten kann, so lange bis man zu den einfachsten Functionen gelangt ist. So ist z. B. die Function

$$y = l(lx)$$

zerlegbar in die beiden einfachen Functionen

$$y = lv \text{ und } v = lx.$$

Hieraus erhält man nach §. 20

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x},$$

und nach §. 24

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x.lx} \quad \text{und} \quad dy=\frac{dx}{x.lx}.$$

§. 31. Es sei gegeben die Function

$$y=a^{b^x},$$

so kann dieselbe zerfällt werden in

$$y=a^v, \text{ und } v=b^x.$$

Nach §. 22 hat man

$$\frac{dy}{dv}=la.a^v, \quad \frac{dv}{dx}=lb.b^x,$$

und nach §. 24

$$\frac{dy}{dx}=la.lb.a^{b^x}.b^x, \quad \text{und} \quad dy=la.lb.a^{b^x}.b^x.dx.$$

§. 32. Es sei ferner

$$y=u^v$$

wo u und v zwei Functionen der unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen. Wenn man nach der Regel des §. 26 nach einander in Bezug auf u allein, und in Bezug auf v allein differentiirt, so erhält man

$$\frac{dy}{du}=vu^{v-1}, \quad \frac{dy}{dv}=lu.u^v.$$

Also durch Addition der Resultate

$$dy=u^v\left(\frac{v}{u}du+lu.dv\right).$$

§. 33. Es sei

$$y=\sin(x+\tfrac{1}{2}\pi),$$

wo π wie gewöhnlich die halbe Kreisperipherie für den Halbmesser Eins bezeichnet. Zerlegt man diese Function in $y=\sin v$ und $v=x+\frac{1}{2}\pi$, so hat man

$$\frac{dy}{dv}=\cos v, \quad \frac{dv}{dx}=1,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x+\tfrac{1}{2}\pi)=-\sin x, \text{ und } dy=-\sin x.\,dx.$$

Da aber sin $(x+\frac{1}{2}\pi) = \cos x$ ist, so ist damit die schon oben hergeleitete Gleichung wieder zum Vorschein gekommen

$$d.\cos x = -\sin x . dx.$$

Man findet ferner für

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad dy = \frac{dx}{\cos x^2}$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad dy = -\frac{dx}{\sin x^2}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad dy = \frac{\sin x . dx}{\cos x^2}$$

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad dy = -\frac{\cos x . dx}{\sin x^2}$$

§. 34. Aus

$$y = l\sin x \text{ wird } dy = \frac{d.\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{dx}{\operatorname{tang} x}$$

$$y = l\cos x \quad dy = \frac{d.\cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\frac{dx}{\cot x}.$$

§. 35. Unter der umgekehrten Function oder der Umkehrung von einer gegebenen Function $f(v)$ versteht man diejenige Function von u, welche man erhält, wenn man die Gleichung $u = f(v)$ in Bezug auf v auflöst. So ist unter den einfachen Functionen a^x die Umkehrung der Function $\log x$; arc $\sin x$ die Umkehrung der Function $\sin x$; arc $\cos x$ die Umkehrung der Function $\cos x$.

Man erhält leicht das Differential der umgekehrten Function, wenn man das Differential der gegebenen Function kennt. Denn es sei z. B.

$$y = \operatorname{arc} \sin x,$$

und man suche das Differential dy. Man hat

$$\sin y = x,$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Differentialverhältnisse nimmt (s. d. Anmerk.), indem man y als Function von x ansieht, und dabei die Regel des §. 24 beachtet, so erhält man

$$\cos y . \frac{dy}{dx} = 1$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Verfährt man ebenso auch mit den übrigen trigonometrischen Functionen, so findet man

$$d.\operatorname{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d.\operatorname{arc}\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d.\operatorname{arc}\operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d.\operatorname{arc}\cot x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d.\operatorname{arc}\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d.\operatorname{arc}\operatorname{cosec} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Auf ähnliche Weise kann man auch die Aufsuchung des schon oben (§. 21) gefundenen Differentials von a_x auf dasjenige von $\log x$ zurückführen. Denn aus der Gleichung $y = a^x$ erhält man $\log y = x \log a$, folglich wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Differentiale nimmt

$$\log e . \frac{dy}{y} = \log a . dx, \quad \text{woraus } dy = \frac{\log a}{\log e} . a^x dx.$$

Anmerk. Wenn zwei Functionen $f(x)$ und $F(x)$ einander gleich sind, und zwar entweder für alle Werthe von x, oder nur für solche Werthe dieser Veränderlichen, die ein gewisses Intervall nicht überschreiten, so werden auch ihre derivirten Functionen, und folglich auch ihre Differentiale innerhalb desselben Intervalles einander gleich sein. Denn aus den beiden Gleichungen

$$f(x) = F(x), \qquad f(x+\Delta x) = F(x+\Delta x)$$

zieht man

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

woraus folgt, wenn man zu der Gränze für $\Delta x = 0$ übergeht

$$f'(x) = F'(x).$$

Man würde dieses Resultat auch dann noch erhalten haben, wenn die Differenz $f(x) - F(x)$, anstatt Null zu sein, irgend einen constanten Werth gehabt hätte.

§. 36. Für den practischen Gebrauch ist es gut, die einfachsten Differential-Ausdrücke im Gedächtniß zu haben; dieselben finden sich in der nachstehenden Uebersicht beisammengestellt.

$d(ax+b)=adx \qquad d\sin x=\cos x.dx \qquad d.\text{arc}\sin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$d.x^a=ax^{a-1}dx \qquad d.\cos x=-\sin x.dx \qquad d.\text{arc}\cos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$d.\frac{1}{x}=-\frac{dx}{x^2} \qquad d.\text{tang}x=\frac{dx}{\cos x^2} \qquad d.\text{arc tang}x=\frac{dx}{1+x^2}$

$d.\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad d.\cot x=-\frac{dx}{\sin x^2} \qquad d.\text{arc}\cot x=-\frac{dx}{1+x^2}$

$d.\log x=\log e\frac{dx}{x} \qquad d.\sec x=\frac{\sin x.dx}{\cos x^2} \qquad d.\text{arc}\sec x=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$d.a^x=la.a^xdx \qquad d.\text{cosec}x=-\frac{\cos x.dx}{\sin x^2} \qquad d.\text{arc cosec}x=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Mit zusammengesetzteren Functionen verfährt man, wie im §. 30 angezeigt worden ist.

§. 37. Um das Verfahren noch an einigen Beispielen zu erläutern, sei

$$1)\quad y=(ax^m+b)^n.$$

Man zerlegt diese Function, wie folgt

$$y=u^n,\quad u=av+b,\quad v=x^m.$$

Durch die vorhergehenden Regeln erhält man sodann

$$dy=nu^{n-1}du,\quad du=adv,\quad dv=mx^{m-1}dx;$$

und indem man substituirt

$$du=a.mx^{m-1}dx$$

$$dy=n(ax^m+b)^{n-1}.amx^{m-1}dx.$$

Aber in der Ausübung wird man sehr bald finden, daß es überflüssig ist, alle diese Gleichungen hinzuschreiben, daß man vielmehr unmittelbar mit denjenigen Größen operiren kann, welche in der vorgelegten Function selbst enthalten sind. So wird man hier anfangs in Bezug auf ax^m+b differentüren, wodurch man erhält

$$dy=n(ax^m+b)^{n-1}.d(ax^m+b).$$

Sodann um das Differential $d\,(ax^m + b)$ zu finden, differentiirt man in Bezug auf x^m; dies gibt

$$d\,(ax^m + b) = a\,.\,d\,(x^m).$$

Endlich hat man

$$d\,(x^m) = mx^{m-1}\,dx.$$

Die allmälige Substitution dieser Werthe führt zu demjenigen von dy.

Es sei

$$2)\ y = \sin\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}.$$

Will man den obigen Regeln gemäß verfahren, so wird man setzen

$$y = \sin t, \qquad t = \frac{ax}{u}, \qquad u = \sqrt{v}, \qquad v = 1 - a^2x^2,$$

womit die gegebene Function in die in ihr enthaltenen einfachen Functionen zerlegt wird, deren Differentiale man unmittelbar kennt. Man erhält alsdann

$$dy = \cos t\,.\,dt,\ dt = \frac{u.adx - ax.du}{u^2},\ du = \frac{dv}{2\sqrt{v}},\ dv = -a^2.2xdx,$$

und durch Substitution

$$du = -\frac{a^2\,.\,xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$dt = \frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \cos\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\,.\,\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aber ohne diese Gleichungen hinzuschreiben, kann man auch unmittelbar mit den in der gegebenen Function enthaltenen Functionen operiren. So wenn man zuerst nach $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ differentiirt, so erhält man

$$dy = \cos\frac{dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}\,.\,d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right).$$

Betrachtet man sodann $\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$ wie einen Bruch von der Form $\frac{u}{v}$, so hat man

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right)=\frac{\sqrt{1-a^2x^2}.adx-ax.d\sqrt{1-a^2x^2}}{1-a^2x^2}.$$

Darauf wird

$$d\sqrt{1-a^2x^2}=\frac{d(1-a^2x^2)}{2\sqrt{1-a^2x^2}},$$

und endlich

$$d(1-a^2x^2)=-a^2.2\,xdx.$$

Substituirt man nun jeden Ausdruck in den nächstvorhergehenden, so kommt

$$d\sqrt{1-a^2x^2}=-\frac{a^2xdx}{\sqrt{1-a^2x^2}},$$

$$d\left(\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}\right)=\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy=\cos\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}.\frac{adx}{(1-a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es sei

$$3)\ y=e^{au^2.\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}},$$

wo e, gemäß dem §. 16, die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und u und v zwei Functionen der unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen. Differentiirt man zuerst in Bezug auf $au^2 \tang\frac{u^2}{u^2+v^2}$, so hat man

$$dy=e^{au^2.\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}}.d\left(au^2.\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}\right).$$

Wird nun das Product $au^2 \tang\frac{u^2}{u^2+v^2}$ in Bezug auf die beiden Factoren au^2 und $\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}$ differentiirt, so kommt

$$d\left(au^2.\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)=\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}\,d(au^2)$$
$$+au^2.d\tang\frac{u^2}{u^2+v^2}.$$

Man hat aber

$$d(au^2) = a.2\,udu,\ \text{und}\ d\,\text{tang}\,\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{d\,\frac{u^2}{u^2+v^2}}{\left(\cos\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)^2};$$

ferner

$$d\,\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{(u^2+v^2).2\,udu - u^2.\,d(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2};$$

und zuletzt

$$d(u^2+v^2) = 2\,(udu+vdv).$$

Substituirt man nun jedes Resultat in den nächstvorhergehenden Ausdruck, so kommt

$$d\,\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{2\,uv\,(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2},$$

$$d\,\text{tang}\,\frac{u^2}{u^2+v^2} = \frac{2uv\,(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2.\left(\cos\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)^2},$$

$$d\left(au^2.\,\text{tang}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}\right) = 2a\left(\text{tang}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}.\,udu + \frac{u^3v(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2\left(\cos\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)^2}\right),$$

$$dy = e^{au^2.\,\text{tang}\frac{u^2}{u^2+v^2}}.\,2a\left(\text{tang}\,\frac{u^2}{u^2+v^2}.\,udu + \frac{u^3v\,(vdu-udv)}{(u^2+v^2)^2\left(\cos\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)^2}\right).$$

Damit das gesuchte Differential dy vermittelst des Differentials dx der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt werde, hat man schließlich noch für du seinen Werth $\frac{du}{dx}\,dx$, und für dv seinen Werth $\frac{dv}{dx}\,dx$ zu setzen.

Die vorstehenden Beispiele werden hinreichen, um den

Gang der in Rede stehenden Operation kennen zu lernen. Durch vielfältige Anwendung verschafft man sich darin leicht die nöthige Geläufigkeit.

IV. Differentiation der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

§. 38. Wenn man, gemäß den im §. 2 entwickelten Begriffen, eine Gleichung zwischen mehr als zwei Veränderlichen besitzt, so wird man allen diesen Veränderlichen, mit Ausnahme einer einzigen, völlig willkürliche Werthe beilegen dürfen. Diejenige Veränderliche, deren Werth durch die Gleichung bestimmt ist, sobald man für alle übrigen Veränderlichen willkürliche Werthe angenommen hat, heißt alsdann die Function dieser letzteren; diese dagegen sind die unabhängigen Veränderlichen. Man kann diese Beziehung ausdrücken durch

$$z = f(u, v, x, y, \ldots),$$

wo u, v, x, y, ... die unabhängigen Veränderlichen bezeichnen, z aber die abhängige Veränderliche oder die Function der übrigen. Um sich von solcher Function ein vollständiges Bild zu entwerfen, ist es nöthig, daß man jede der Veränderlichen u, v, x, y, ... alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lasse, und dabei die Reihefolge der entsprechenden Werthe beachte, welche die Function z annimmt.

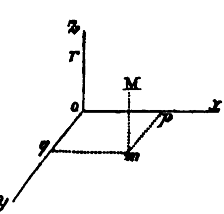
§. 39. Wenn nicht mehr als zwei unabhängige Veränderliche vorhanden sind, und man also hat

$$z = f(x, y),$$

so bietet noch, wie früher, die Geometrie das Mittel dar, um

die Reihefolge der Werthe der Function z anschaulich darzustellen. Man nehme im Raume drei Achsen an, die einander in einem Punkte o, Fig. 2, unter rechten Winkeln durchschneiden. Die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y betrachte man wie zwei Abscissen, deren willkürliche Werthe in op und oq auf den beiden ersten Achsen abgetragen worden sind, und die abhängige Veränderliche z wie eine Ordinate, deren aus der Beziehung $z=f(x,y)$ sich bestimmender Werth in or auf der dritten Achse abgetragen wird. Die beiden Werthe von x und y legen in der Ebene xy einen Punkt m fest; errichtet man in diesem Puncte m ein Perpendikel auf der Ebene xy, dessen Länge mM gleich or angenommen wird, so erhält man einen Punkt M im Raume, dessen Projectionen auf den drei Achsen die vorhin bestimmten drei Puncte p, q, r sind, oder der wie der Durchschnitt dreier Ebenen angesehen werden kann, von welchen die erste durch den Punkt p parallel mit der Ebene yz, die zweite durch den Punkt q parallel mit der Ebene xz, die dritte durch den Punkt r parallel mit der Ebene xy gelegt wird. Läßt man nun sowol x als y alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so wird der Punkt m alle möglichen Lagen in der Erstreckung der Ebene xy annehmen. Die Werthe von z werden sodann die zugehörigen Lagen des Punktes M feststellen, und der Inbegriff aller dieser Lagen wird eine Fläche ergeben, deren Gestalt über die Beschaffenheit der Function $z=f(x, y)$ und den Gang ihrer Werthe Aufschluß geben kann.

Fig. 2.



Wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen die Zahl 2 übertrifft, so ist es nicht mehr möglich, auf solche Weise in der Geometrie ein anschauliches Bild von der Natur

und den Eigenschaften einer Function aufzufinden. Zwar bieten mehrere physikalische Untersuchungen den Anlaß zur Betrachtung von drei, und selbst vier unabhängigen Veränderlichen; indessen sobald die Anzahl dieser Veränderlichen beträchtlicher wird, so gehören die Fragen nur noch der Analysis an, deren Allgemeinheit keine Beschränkung erleidet und die alle Fälle umfaßt, zu welchen jemals die Betrachtung der Größen den Anlaß geben könnte.

§. 40. Die Differentiation der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen stützt sich auf dieselben Grundlagen, welche in den vorhergehenden Abschnitten enthalten sind. Jede unabhängige Veränderliche $u, v, x, y, \ldots$ erleidet einen Zuwachs um eine unendlich kleine Differenz $du, dv, dx, dy \ldots$ von denen jede einen constanten Werth besitzt, während sie jedoch unter einander in gar keiner bestimmten Beziehung stehen. Die Veränderliche z ändert sich in Folge dessen um die unendlich kleine Größe dz, deren Werth man immer durch die Betrachtung derjenigen Gränzen findet, welchen die Verhältnisse unter der Zunahme der Function und den Zunahmen der einzelnen unabhängigen Veränderlichen stets näher kommen.

Denn es sei die gegebene Function

$$z = f(x, y).$$

Wenn nun x und y resp. um die willkürlichen Größen Δx und Δy wachsen, so kann man die entsprechende Aenderung Δz der Function in zwei Theile zerlegen, von denen der eine aus der Aenderung von x allein, der andere aus der Aenderung von y allein hervorgeht. Zu diesem Ende hat man nämlich nur nöthig, für den Ausdruck von Δz, nämlich

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

den damit identischen Ausdruck an die Stelle zu setzen

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] + [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)],$$

wofür man auch schreiben kann

$$\Delta z = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y}\Delta y.$$

Läßt man nun die Differenzen Δx und Δy sich ohne Aufhören der Null nähern, so hat man in Gemäßheit der Entwickelungen des I. Abschnitts

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{d.f(x,y)}{dx},$$

und ebenso mit Zuziehung einer ähnlichen Betrachtung wie im §. 26

$$\lim \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{d.f(x,y)}{dy}.$$

Der Ausdruck für das gesuchte Differential wird also

$$dz = \frac{d.f(x,y)}{dx}dx + \frac{d.f(x,y)}{dy}dy$$

oder kürzer

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

§. 41. Wenn die vorgelegte Function drei oder mehr unabhängige Veränderliche enthält, so führen noch immer dieselben Betrachtungen zur Auffindung ihres Differentials. So wird man aus

$$z = f(v, x, y)$$

erhalten

$$dz = \frac{d.f(v,x,y)}{dv}dv + \frac{d.f(v,x,y)}{dx}dx + \frac{d.f(v,x,y)}{dy}dy,$$

wofür man auch kürzer schreiben kann

$$dz = \frac{dz}{dv}dv + \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

Ebenso bei einer größeren Anzahl von Veränderlichen.

Man wird bemerken, daß in dieser Formel das Glied $\frac{dz}{dv}dv$ dasjenige Differential der vorgelegten Function darstellt, welches man finden würde, wenn man v allein als

unabhängige Veränderliche ansehen wollte. Man nennt dasselbe das partielle Differential der Function z, genommen in Bezug auf die Veränderliche v. Ebenso heißen die Glieder $\frac{dz}{dx} dx$ und $\frac{dz}{dy} dy$ die partiellen Differentiale der Function z, genommen in Bezug auf x und auf y. Die Summe dieser partiellen Differentiale macht das vollständige Differential dz der vorgelegten Function aus. Die Brüche $\frac{dz}{dv}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ sind hier analytische Zeichen, welche die Differentialverhältnisse der Function z in Bezug auf je eine der Veränderlichen v, x, y, diese als die einzige Veränderliche angesehen, ausdrücken; der Zähler dz dieser Brüche ist stets das partielle Differential von z in Bezug auf diejenige Veränderliche, deren Differential im Nenner steht. Man darf mithin das dz, welches im Zähler steht, niemals mit demjenigen dz verwechseln, welches auf der linken Seite der obigen Gleichung vorkommt und das vollständige Differential der Function z ausdrückt.

Vermöge der Unabhängigkeit, welche unter den Werthen der Veränderlichen v, x, y stattfindet, ist es übrigens keineswegs erforderlich, sie alle gleichzeitig sich ändern zu lassen. Vielmehr wenn man das Differential der Function $z = f(v, x, y)$ verlangt, so hat man stets noch besonders hinzuzufügen, ob dieses Differential das vollständige Differential sein soll, in welchem Falle es allgemein durch die obige Formel ausgedrückt wird, oder ob es nur in Bezug auf eine, oder auch auf einige von den Veränderlichen soll genommen werden. Im letzteren Falle würde man in der in Rede stehenden Formel diejenigen Glieder weglassen, welche sich auf Veränderliche beziehen, die keiner Zunahme sollen fähig sein.

§. 42. Da nach dem Vorhergehenden die Differentia=

tion der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen darauf zurückgeführt wird, die Function in Bezug auf jede einzelne dieser Veränderlichen zu differentiiren, so wird man ohne Schwierigkeit in jedem besonderen Falle mit den im vorhergehenden Abschnitte gegebenen Regeln zum Ziele gelangen.

§. 43. Sobald die gegebene Function nur zwei unabhängige Veränderliche enthält, wie

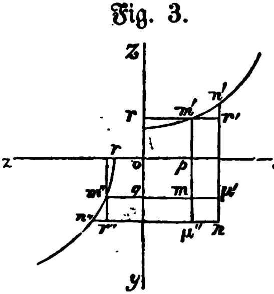
$$z = f(x, y),$$

so sind die verschiedenen Theile des vollständigen Differentials

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

gemäß dem, was im §. 39 gesagt worden ist, einer geometrischen Darstellung fähig. Es sei m, Fig. 3, ein Punkt der Ebene xy, dessen Coordinaten op und oq Werthe der Veränderlichen x und y darstellen, und M sei der in m projicirte Punkt der Fläche, dessen Ordinate or den zugehörigen Werth der Function z angibt. Die Zunahmen Δx und Δy mögen durch $m\mu'$ und $m\mu''$ dargestellt werden.

Fig. 3.



Ferner denke man sich die Fläche im Punkte M durch zwei Ebenen geschnitten, welche resp. den Ebenen xz und yz parallel laufen; die Projection der im ersten Falle entstehenden Durchschnittslinie auf die Ebene xz sei $m'n'$, die Projection der im zweiten Falle entstehenden Durchschnittslinie auf die Ebene yz sei $m''n''$. Alsdann ist klar, daß $n'r'$ die Aenderung bezeichnet, welche die Ordinate z erleiden würde, wenn die Abscisse x allein zunähme um Δx oder $m\mu'$; oder daß $n''r''$ die Aenderung bezeichnet, welche die nämliche Ordinate erleiden würde, wenn die Abscisse y allein

sich änderte um Δy oder $m\mu''$. Die vollständige Aenderung der Ordinate z dagegen, welche aus der gleichzeitigen Aenderung beider Abscissen hervorgeht, wird dargestellt durch die Differenz zwischen der Ordinate des Punktes M der Fläche, welcher den Punkt m zu seiner Projection hat, und der Ordinate desjenigen Punkts der nämlichen Fläche, welcher den Punkt n zu seiner Projection hat. Werden nun die Zunahmen unendlich klein angenommen, so drückt $n'r'$ den Theil $\frac{dz}{dx}dx$ des vollständigen Differentials aus, und das Differentialverhältniß $\frac{dz}{dx}$, welches in Bezug auf x genommen ist, wird durch die trigonometrische Tangente des Winkels $n'm'r'$ dargestellt. Ebenso drückt $n''r''$ den Theil $\frac{dz}{dy}dy$ des vollständigen Differentials aus, und das Differentialverhältniß $\frac{dz}{dy}$, welches in Bezug auf y genommen ist, wird durch die trigonometrische Tangente des Winkels $n''m''r''$ dargestellt. Man erkennt also, daß, unter der Voraussetzung unendlich kleiner Zunahmen, die Aenderung der Ordinate z, welche durch einen Uebergang aus dem in m projicirten Punkte der Fläche zu dem in n projicirten Punkte derselben Fläche zu Stande kommt, immer der Summe derjenigen Aenderungen gleich ist, welche entstehen, wenn man aus dem in m projicirten Punkte zu den beiden in μ' und μ'' projicirten Punkten übergeht.

Diese Betrachtungen werden späterhin wieder aufgenommen werden und eine größere Ausdehnung erhalten.

V. Differentiation unentwickelter Functionen.

---

§. 44. Eine Function wird **entwickelt** (explicit) genannt, wenn ihr analytischer Ausdruck vermittelst der constanten und veränderlichen Größen, von welchen ihr Werth abhängt, gegeben ist. So sagt man, die Function z der beiden Veränderlichen x und y sei eine entwickelte Function, oder sie sei entwickelt gegeben, wenn man die Gleichung hat

$$z = f(x, y).$$

Dagegen wenn die Function z noch mit den Veränderlichen x und y verknüpft in einer Gleichung vorkommt, wie

$$F(x, y, z) = 0,$$

welche nicht in Bezug auf z aufgelöst ist, so wird diese Function **unentwickelt** (implicit) genannt; und man versteht unter dieser Bezeichnung, daß der Werth der Function z, obgleich derselbe bestimmt ist, sobald man den Veränderlichen x und y bestimmte Werthe beigelegt hat, nur noch nicht durch einen aus diesen Veränderlichen gebildeten analytischen Ausdruck dargestellt wird. Man kann aber die unentwickelten Functionen eben so leicht differentiiren, wie die übrigen, d. h. den Ausdruck für das Differential der Function erhalten, ohne die Gleichung aufzulösen, in welcher sie verknüpft vorkommt.

Zu dem Ende kehre man zu den Grundbegriffen des §. 2 zurück. Die Natur einer jeden Aufgabe bestimmt immer sowol die Anzahl der Veränderlichen, als auch die Beziehungen, welche unter denselben stattfinden und durch Gleichungen ausgedrückt werden. Die Anzahl der Veränderlichen sei m und die Anzahl der Gleichungen sei n, so werden $m - n$ Veränderliche unabhängige sein; die n übrigen Veränderlichen sind sodann Functionen der ersteren.

Ferner wird man diejenigen Veränderlichen bestimmt anzeigen, welche als die unabhängigen angesehen werden sollen, und eben so diejenigen, welche Functionen der ersteren sind; und diese Unterscheidung muß ohne Abweichung durch den ganzen Lauf der Operation festgehalten werden.

Es mag nun zuerst der einfache Fall betrachtet werden, wo zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x und ihrer Function y die Gleichung besteht

$$f(x,y) = 0.$$

Da diese Gleichung stattfinden muß, welchen Werth man auch der Veränderlichen x beilegen mag, so hat man augenscheinlich

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0,$$

wo, wie bisher, Δy die Zunahme der Function y bezeichnet, welche der Zunahme Δx von x entspricht. Daraus folgt weiter

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta x} = 0,$$

welche Gleichung für jeden Werth von Δx bestehen muß, und folglich auch für die Gränze, welche der linken Seite der Gleichung angehört, sobald Δx dem Werthe Null immer näher gebracht wird. Diese Gränze ist aber nichts anderes als das Differentialverhältniß $\frac{d.f(x,y)}{dx}$ der linken Seite der gegebenen Gleichung, dessen Ausdruck nach §. 26 wird, wenn man beachtet, daß x die unabhängige Veränderliche und y Function derselben ist $\frac{d.f(x,y)}{dx} + \frac{d.f(x,y)}{dy}\,\frac{dy}{dx}$. Man hat also die Gleichung

$$\frac{d.f(x,y)}{dx} + \frac{d.f(x,y)}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

welche man auch kürzer schreiben kann, wenn man die gegebene Function $f(x, y)$ bloß durch den Buchstaben f bezeichnet,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

Daraus erhält man endlich für den Ausdruck des Differentialverhältnisses oder der derivirten Function von y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Man kann übrigens bemerken, daß dieses Differentialverhältniß im allgemeinen durch beide Veränderliche x und y ausgedrückt sein wird.

Die Größe $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}$ ist nichts anderes als das Differential der Function f nach Wegwerfung des constanten Factors dx. Dieses Differential soll gleich Null sein; und in der That, wenn die Gleichung $f(x, y) = 0$ für jeden beliebigen Werth von x bestehen soll, so wird der Ausdruck für eine endliche oder unendlich kleine Aenderung, welche die Function $f(x, y)$ in Folge einer endlichen oder unendlich kleinen Zunahme des x erfährt, stets gleich Null sein müssen. Im allgemeinen wird man hieraus schließen, daß die Gleichung $f = 0$, wo f eine beliebige Function von mehreren Veränderlichen bezeichnet, stets zur Folge hat die Gleichung $df = 0$, wo df das Differential der Function f bedeutet, welches ein vollständiges oder ein partielles Differential sein kann.

§. 45. Es bleibt noch der allgemeine Fall zu betrachten, wo man mehrere Functionen und mehrere unabhängige Veränderliche hat. Es seien z. B. die beiden Gleichungen gegeben

$$f(v, x, y, z) = 0$$
$$F(v, x, y, z) = 0,$$

in denen v und x unabhängige Veränderliche sein mögen, y und z aber Functionen von v und x, welche durch diese

beiden Gleichungen unentwickelt gegeben sind. Die Differentiale der beiden Functionen f und F müssen nach dem, was so eben gesagt worden ist, gleich Null sein; wenn man also die Differentiale nach den Regeln der vorhergehenden Abschnitte bildet, und dabei festhält, daß y und z Functionen von v und x sind, so hat man

$$\left(\frac{df}{dv}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dv}\right)dv+\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx=0$$

$$\left(\frac{dF}{dv}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dv}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dv}\right)dv+\left(\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx=0.$$

In jeder dieser Gleichungen kann man nach Gefallen $dv=0$, oder auch $dx=0$ annehmen. Sie sind mithin gleichbedeutend mit vier verschiedenen Gleichungen, aus denen die Werthe der vier Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dv}, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dv}, \frac{dz}{dx}$ bestimmt werden können. Diese Differentialverhältnisse finden sich ausgedrückt durch die vier Veränderlichen v, x, y, z.

Hat man auf diese Weise die Werthe der partiellen Differentialverhältnisse der Functionen y und z gefunden, so bildet man die vollständigen Differentiale dieser Functionen, indem man die in Rede stehenden Werthe in die allgemeinen Ausdrücke substituirt

$$dy=\frac{dy}{dv}\,dv+\frac{dy}{dx}\,dx,\quad dz=\frac{dz}{dv}\,dv+\frac{dz}{dx}\,dx.$$

Die hier angestellten Betrachtungen lassen sich leicht auf solche Fälle ausdehnen, wo eine größere Anzahl von Veränderlichen und von Gleichungen vorgelegt ist.

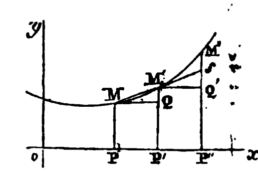
VI. Differentiale höherer Ordnungen für die Functionen von einer Veränderlichen.

§. 46. Zunächst wird hier wieder die frühere Beschränkung aufgenommen, wo nur eine unabhängige Veränderliche x nebst der davon abhängigen Function y vorliegen, so daß man hat

$$y = f(x);$$

und zugleich wird, um größerer Anschaulichkeit willen, aus dem §. 5 die geometrische Darstellung der Function zu Hülfe gezogen. Die Abscisse OP, Fig. 4, bedeutet x, die Ordinate PM dagegen y.

Fig. 4.



Man nehme an, x wachse um die willkürliche Größe Δx, welche durch PP' dargestellt werde. Der neue Werth von y, welcher mit y_1 bezeichnet werden mag, wird durch $P'M'$ dargestellt werden, so wie Δy durch QM'. Man hat also

$$\Delta y = y_1 - y.$$

Man nehme ferner an, x wachse nochmals, von dem Werthe OP' ausgehend, um dieselbe Größe Δx, welche durch $P'P'' = PP'$ angegeben werde. Der neue Werth von y, welche mit y_2 bezeichnet werden mag, wird jetzt durch $P''M''$ dargestellt werden, und Δy_1 durch $Q'M''$. Man hat

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1.$$

Verlängert man nun die Secante MM' bis s, so wird die Linie $Q's$ gleich QM' oder gleich Δy sein. Also stellt sM'' die Differenz zwischen Δy_1 und Δy dar. So wie man nun mit Δy die Differenz der beiden Werthe von y bezeichnet hat, welche den Werthen x und $x + \Delta x$ entsprechen,

so fordert die Analogie in gleicher Weise auch mit $\Delta\Delta y$ oder $\Delta^2 y$ die Differenz der beiden Werthe von Δy zu bezeichnen, welche den Werthen x und $x + \Delta x$ zugehören. Man schreibt also

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y.$$

Man gelangt zu einer bequemen Uebersicht der hier betrachteten Größen, wenn man dieselben zu folgender Tabelle zusammenstellt:

Werthe von x	Zugehörige Werthe von y.	Differenzen dieser Werthe.	Differenzen der Differenzen.
x	y		
$x+\Delta x$	y_1	$\Delta y = y_1 - y$	
$x+2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$

Man nennt Δy die erste Differenz oder die Differenz der ersten Ordnung der Function y; und $\Delta^2 y$ die zweite Differenz oder die Differenz der zweiten Ordnung der nämlichen Function.

§. 47. Man nehme jetzt an, die Differenz Δx der unabhängigen Veränderlichen werde kleiner und komme immer näher dem Werthe Null. Die beiden Punkte M', M'' werden sodann immer näher dem Punkte M fallen; die beiden Werthe y_1, y_2 werden immer mehr gleich y werden; und die drei Differenzen Δy, Δy_1 und $\Delta^2 y$ werden zu gleicher Zeit immer näher dem Werthe Null kommen. Aber es ist wohl zu bemerken, daß die zweite Differenz $\Delta^2 y$ viel schneller abnimmt als die ersten Differenzen Δy und Δy_1, so daß, wenn

Δx, Δy und Δy_1 sehr klein geworden sind im Vergleich zur Einheit, sodann $\Delta^2 y$ sehr klein geworden sein wird im Vergleich zu Δx, Δy oder Δy_1.

Um sich davon zu überzeugen, beachte man nur, daß der Ausdruck für $\Delta^2 y$ auch geschrieben werden kann

$$\Delta^2 y = \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Wenn hierin Δx abnimmt und immer näher dem Werthe Null kommt, so werden die Größen $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sich beide der nämlichen Gränze nähern; diese ist $\frac{dy}{dx}$. Der Werth von $\Delta^2 y$ ist also aus zwei Factoren zusammengesetzt, welche den Werth Null zur gemeinschaftlichen Gränze haben, und wird also viel schneller abnehmen als jeder von diesen Factoren einzeln genommen; oder, wenn beide an sich sehr klein geworden sind, so wird der Werth von $\Delta^2 y$ selbst sehr klein geworden sein im Vergleich zu jedem von ihnen.

§. 48. Der nämliche Ausdruck von $\Delta^2 y$ kann auch geschrieben werden

$$\Delta^2 y = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} (\Delta x)^2.$$

Sobald nun Δx ohne Aufhören abnimmt und kleiner wird als jede gegebene Größe, in welchem Falle man diese Differenz mit dx bezeichnet, so hat jede der Größen $\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zu ihrer Gränze das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$; das Verhältniß $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$ aber hat zu seiner Gränze das Differential=

verhältniß der Function $\frac{dy}{dx}$, d. i.

$$\lim \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}.$$

Bezeichnet man also mit d^2y dasjenige, was aus $\Delta^2 y$ wird, wenn Δx in dx übergeht, so hat man

$$d^2y = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}(dx)^2.$$

Man nennt d^2y das Differential der zweiten Ordnung der Function y. Um größerer Einfachheit willen schreibt man übrigens bloß Δx^2 oder dx^2, um das Quadrat von Δx oder von dx anzuzeigen; denn es ist nicht zu befürchten, daß der Ausdruck dx^2 mit dem Differential der Function x^2 verwechselt werde, welches im Gegentheil durch $d(x^2)$ oder $d.x^2$ bezeichnet werden muß.

Die Function $\frac{dy}{dx}$ ist das Differentialverhältniß der ersten Ordnung der Function y, und ebenso ist $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung der nämlichen Function. Die Analogie nöthigt, letzteres auf eine einfachere Weise durch $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bezeichnen. Das Differential der zweiten Ordnung wird demnach

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2}dx^2,$$

d. h. es ist gleich dem Producte aus dem Quadrate von dx und dem Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung von der vorgelegten Function; oder aus dem Quadrate von dx

und derjenigen Function, welche man finden würde, wenn man nach den Regeln des III. Abschnittes das Differentialverhältniß von diesem Differentialverhältniß bildete.

Wenn man nach Lagrange das Differentialverhältniß oder die derivirte Function der ersten Ordnung durch y' oder $f'(x)$ ausdrückt, so bezeichnet man in gleicher Weise das Differentialverhältniß oder die derivirte Function der zweiten Ordnung mit y'' oder $f''(x)$.

§. 49. Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß man das Differential der zweiten Ordnung von einer gegebenen Function erhält, wenn man diese Function zweimal nach einander differentiirt und bei der zweiten Differentiation das Differential dx wie einen constanten Factor betrachtet.

§. 50. Man kann sich die Tabelle des §. 46 weiter fortgesetzt denken, indem man vier auf einander folgende Werthe von x betrachtet, welche durch das constante Intervall Δx von einander getrennt werden; nämlich:

Werthe von x	Zugehörige Werthe von y	Erste Differenzen	Zweite Differenzen	Dritte Differenzen
x	y			
$x+\Delta x$	y_1	$\Delta y = y_1 - y$		
$x+2\Delta x$	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$	
$x+3\Delta x$	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$

Man wird wiederum bemerken, daß, wenn Δx ohne Aufhören abnimmt, die Werthe von y_1, y_2, y_3 immer mehr

gleich y werden, und daß ebenso die ersten, zweiten und dritten Differenzen immer näher dem Werthe Null kommen. Aber gleichwie $\Delta^2 y$ viel schneller abnimmt als Δy, so ist auch leicht zu erkennen, daß $\Delta^3 y$ wieder viel schneller abnimmt als $\Delta^2 y$. Man kann nämlich den Ausdruck für $\Delta^3 y$ schreiben

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta^2 y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right) \Delta x^2$$

oder auch

$$\Delta^3 y = \left(\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}\right) \Delta x^2.$$

Wenn nun hierin Δx unendlich abnimmt, so nähern sich die beiden Glieder $\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2}$ und $\frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}$ einer und derselben Gränze, nämlich $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Der Werth von $\Delta^3 y$ ist also aus drei Factoren zusammengesetzt, welche zur gemeinschaftlichen Gränze den Werth Null haben, und nimmt also viel schneller ab als der Werth von $\Delta^2 y$, welcher nur durch zwei solcher Factoren gebildet wird. Sobald demnach Δy sehr klein wird im Vergleich zur Einheit, so wird $\Delta^2 y$ sehr klein werden im Vergleich zu Δy, und $\Delta^3 y$ sehr klein im Vergleich zu $\Delta^2 y$.

§. 51. Bringt man ferner $\Delta^3 y$ unter die Form

$$\Delta^3 y = \frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x} \Delta x^3,$$

so erkennt man, daß, wenn Δx abnimmt und kleiner wird als jede gegebene Größe, jeder der beiden Ausdrücke $\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2}$ und $\frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}$ zu seiner Gränze das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung $\frac{d^2 y}{dx^2}$ hat; das Verhältniß

$$\frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x}$$

aber zu seiner Gränze das Differentialverhältniß der Function $\frac{d^2y}{dx^2}$, d. i.

$$\lim \frac{\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\Delta x^2} - \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}.$$

Man hat also, wenn man mit d^3y dasjenige bezeichnet, was aus $\Delta^3 y$ wird indem Δx sich in dx verwandelt,

$$d^3y = \frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}\,dx^3,$$

oder wie man einfacher schreiben kann

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3.$$

Man nennt d^3y das **Differential der dritten Ordnung** der gegebenen Function y, und ebenso die Function $\frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}$ oder $\frac{d^3y}{dx^3}$ das **Differentialverhältniß der dritten Ordnung** der nämlichen Function. Das Differential der dritten Ordnung ist gleich dem Producte aus dem Cubus von dx und dem Differentialverhältnisse der dritten Ordnung.

Das Differentialverhältniß oder die derivirte Function der dritten Ordnung bezeichnet man auch durch y''' oder durch $f'''(x)$.

§. 52. Man erhält augenscheinlich das Differential der dritten Ordnung von einer gegebenen Function, wenn man diese Function dreimal nach einander differentiirt und dabei das Differential dx sowol bei der zweiten als bei der dritten Differentiation wie einen constanten Factor betrachtet.

§. 53. Wollte man ebenso fünf auf einander folgende

Werthe der unabhängigen Veränderlichen x, so wie die fünf zugehörigen Werthe der Function y betrachten, so würde man zu der Differenz der vierten Ordnung $\Delta^4 y$ gelangen, deren Ausdruck aus vier Factoren gebildet ist, welche sämmtlich zugleich mit Δx ohne Aufhören dem Werthe Null näher kommen. Diese vierte Differenz wird also, während Δx sich der Null nähert, noch viel schneller abnehmen, als die dritte Differenz, welche nur aus drei Factoren besteht, die Null zur Gränze haben. Bezeichnet man mit $d^4 y$ dasjenige, was aus $\Delta^4 y$ wird, wenn Δx den unendlich kleinen Werth dx annimmt, so erhält man ähnlich wie oben,

$$d^4 y = \frac{d^4 y}{dx^4}\, dx^4,$$

wo $\frac{d^4 y}{dx^4}$ das Differentialverhältniß der vierten Ordnung von der vorgelegten Function bezeichnet, also dasjenige Resultat, welches gefunden wird, wenn man diese Function viermal nach einander differentiirt, indem dx wie ein constanter Factor angesehen wird, und sodann durch dx^4 dividirt.

Auf ähnliche Weise gelangt man, durch Betrachtung einer größern Anzahl von Werthen, zu den Differenzen und den Differentialen höherer Ordnungen.

§. 54. Die bisherigen Betrachtungen lehren, daß jede Function $y = f(x)$ angesehen werden kann wie der Ausgangspunkt einer unbestimmt langen Reihe von Differentialen, die bezeichnet werden durch

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx,\; d^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}\, dx^2,\; d^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3}\, dx^3 \text{ ꝛc.}$$

und die aus der Function selbst und aus einander durch diejenige Operation hergeleitet werden, welche man die Differentiation nennt. Die Ausdrücke dieser Differentiale legen überdies sogleich die Unterordnung klar vor Augen, welche unter ihren Werthen stattfindet, indem nämlich die Differen=

tialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ꝛc., welche im allgemeinen endliche Functionen der Veränderlichen x sind, allmälig mit höheren und höheren Potenzen der unendlich kleinen Größe dx multiplicirt werden. Jene Unterordnung aber ist vorhanden, obschon alle Differentiale dy, d^2y, d^3y ꝛc. selbst wie Größen angesehen werden, welche von Null um weniger als jede gegebene Größe verschieden sind. Denn die Voraussetzung, daß dx von Null um weniger als jede gegebene Größe verschieden, d. h. unendlich klein sei, hat sofort zur Folge, daß die Verhältnisse d^2y zu dy, d^3y zu d^2y ꝛc. gleichfalls um weniger als jede gegebene Größe sich von Null unterscheiden; welches man kürzer ausdrückt, indem man sagt, daß diese Größen unendlich klein sind im Vergleich zu einander, oder daß sie eine Reihe unendlich kleiner Größen von höheren und höheren Ordnungen bilden.

§. 55. Man kann bemerken, daß, wenn die Function $y=f(x)$ durch die Ordinate einer Curve dargestellt wird, deren Abscisse x ist, sowohl das Steigen und Fallen dieser Curve in der Nähe eines gegebenen Punktes derselben als auch diejenige Seite, nach welcher hin sie in der Nähe dieses Punktes ihre Convexität oder Concavität wendet, schon aus dem bloßen Vorzeichen entnommen werden kann, welches die beiden Differentialverhältnisse der ersten und der zweiten Ordnung $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, für den betreffenden Werth von x annehmen.

Sobald nämlich in der gegebenen Function $y=f(x)$ mit wachsenden Werthen von x die Werthe von y gleichfalls wachsen (oder mit abnehmenden Werthen von x die Werthe von y gleichfalls abnehmen), so werden die Differenzen Δx und Δy dieser Function einerlei Vorzeichen be=

sitzen, also wird das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen positiven Werth haben. Das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ der nämlichen Function, welches die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, kann mithin gleichfalls nur positiv, oder auch gleich Null sein. Sobald ferner in der gegebenen Function mit wachsenden Werthen von x die Werthe von y abnehmen (oder mit abnehmenden Werthen von x die Werthe von y wachsen), so werden die Differenzen Δx und Δy verschiedene Vorzeichen besitzen, also wird das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ einen negativen Werth haben. Das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$, als Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kann mithin gleichfalls nur negativ, oder gleich Null sein. Nun entspricht in derjenigen Curve, welche durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird, der erste Fall einem Steigen der Curve, der zweite Fall dagegen einem Fallen der Curve. Folglich darf man immer aus einem positiven Vorzeichen des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ schließen, daß die durch die Gleichung $y = f(x)$ gegebene Curve in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes der Curve steigt; aus einem negativen Vorzeichen des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ dagegen, daß die Curve in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes fällt.

Ebenso wenn in der gegebenen Function $y = f(x)$ mit wachsenden (oder mit abnehmenden) Werthen von x die Werthe der Differenz Δy dieser Function wachsen, so wird die zweite Differenz $\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$ der nämlichen Function (s. §. 46) das positive Vorzeichen besitzen, und da diese

zweite Differenz nach §. 48 auch auf die Form gebracht werden kann

$$\Delta^2 y = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x} (\Delta x)^2,$$

so wird auch das Verhältniß $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$ einen positiven Werth haben. Das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$, welches die Gränze des Verhältnisses $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$ ist, kann mithin gleichfalls nur positiv, oder gleich Null sein. Wenn ferner in der gegebenen Function mit wachsenden (oder mit abnehmenden) Werthen von x die Werthe der Differenz Δy abnehmen, so wird die zweite Differenz $\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$ dieser Function das negative Vorzeichen besitzen, also auch das Verhältniß $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$ einen negativen Werth haben. Das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$, als Gränze des Verhältnisses $\frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}$, kann mithin gleichfalls nur negativ, oder gleich Null sein. Nun entspricht in der Curve, welche durch die Gleichung $y = f(x)$ gegeben wird, der erste Fall derjenigen Gestalt der Curve, wo dieselbe ihre convexe Seite nach unten wendet, der zweite Fall dagegen derjenigen Gestalt der Curve, wo dieselbe ihre concave Seite nach unten wendet. Folglich darf man immer aus einem positiven Vorzeichen des zweiten Differentialverhältnisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ schließen, daß die durch die Gleichung $y = f(x)$ gegebene

Curve in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes ihre Convexität nach unten richtet; aus einem negativen Vorzeichen des zweiten Differentialverhältnisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ dagegen, daß die Curve in der Nachbarschaft des betreffenden Punktes ihre Concavität nach unten richtet. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, daß, wie es gewöhnlich geschieht, die positiven Ordinaten von unten nach oben abgetragen werden.

Die verschiedenen Fälle, welche hier eintreten können, sind in den folgenden Figuren dargestellt.

Fig. 5. Fig. 7. Fig. 9. Fig. 11.

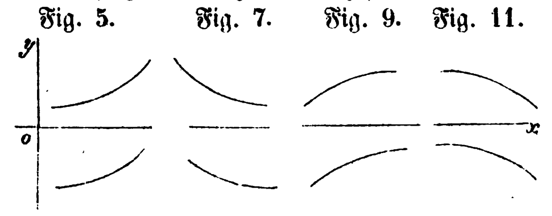


Fig. 6. Fig. 8. Fig. 10. Fig. 12.

In Fig. 5 und 6 sind die Differentialverhältnisse beide positiv; in Figur 7 und 8 ist $\frac{dy}{dx}$ negativ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv; in Fig. 9 und 10 ist $\frac{dy}{dx}$ positiv und $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ; endlich in Fig. 11 und 12 sind die Differentialverhältnisse beide negativ. Man sieht also, daß $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, während die Curve steigt, und negativ, während die Curve fällt; und ebenso daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, während die Curve ihre Convexität nach unten wendet, dagegen negativ, während sie ihre Concavität nach unten wendet.*)

*) Diese Betrachtungen würden, bei weiterer Ausführung, unmittelbar zu einer Theorie der Maxima und Minima führen, welche der Ver-

Höhere Differentiale der einfachen Functionen.

§. 56. Die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen geben folgende Anwendungen auf die einfachen Functionen, deren Differentiation den Gegenstand des II. Abschnittes ausgemacht hat.

Betrachtet man zuerst die Function x^m, so erhält man

$$\frac{d.x^m}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2 x^m}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\frac{d^3.x^m}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\frac{d^4.x^m}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$$

rc.

Diese Reihe von Differentialverhältnissen läuft ohne Ende fort, wenn der Exponent m negativ ist, oder wenn, im Falle er positiv sein sollte, er sich als Bruch oder als Irrationalzahl darstellt. Wenn dagegen m eine positive ganze Zahl ist, so hat man

$$\frac{d^m.x^m}{dx^m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.3.2.1;$$

die Function reducirt sich also auf eine Constante, und mithin sind die folgenden Differentialverhältnisse sämmtlich Null.

§ 57. Die Function $\log x$, wo der Logarithmus entweder in einem beliebigen Systeme, oder im Systeme der Neper'schen Logarithmen genommen werden mag, gibt

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{\log e}{x}, \qquad \frac{d.lx}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2.\log x}{dx^2} = -\frac{\log e}{x^2}, \qquad \frac{d^2.lx}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},$$

---

fasser weiter unten aus anderen Grundlagen entwickelt. Man sehe darüber die Differentialrechnung von Cauchy.

$$\frac{d^3.\log x}{dx^3} = \frac{2.\log e}{x^3}, \qquad \frac{d^3.lx}{dx^3} = \frac{2}{x^3},$$

$$\frac{d^4.\log x}{dx^4} = -\frac{2.3.\log e}{x^4}, \qquad \frac{d^4.lx}{dx^4} = -\frac{2.3}{x^4},$$

$$\frac{d^5.\log x}{dx^5} = \frac{2.3.4.\log e}{x^5}, \qquad \frac{d^5.lx}{dx^5} = \frac{2.3.4}{x^5},$$

ꝛc. ꝛc.

§. 58. Die Functionen a^x und a^{-x} geben

$$\frac{d.a^x}{dx} = la.a^x, \qquad \frac{d.a^{-x}}{dx} = -la.a^{-x},$$

$$\frac{d^2.a^x}{dx^2} = (la)^2.a^x, \qquad \frac{d^2.a^{-x}}{dx^2} (la)^2.a^{-x},$$

$$\frac{d^3.a^x}{dx^3} = (la)^3.a^x, \qquad \frac{d^3.a^{-x}}{dx^3} = -(la)^3.a^{-x},$$

ꝛc. ꝛc.

Und wenn die Zahl a übergeht in e oder in die Basis der Neper'schen Logarithmen, so hat man

$$\frac{d.e^x}{dx} = e^x, \qquad \frac{d.e^{-x}}{dx} = -e^{-x},$$

$$\frac{d^2.e^x}{dx^2} = e^x, \qquad \frac{d^2.e^{-x}}{dx^2} = e^{-x},$$

$$\frac{d^3.e^x}{dx^3} = e^x, \qquad \frac{d^3.e^{-x}}{dx^3} = -e^{-x},$$

ꝛc. ꝛc.

Die Differentiation reproducirt beständig, wie schon im §. 22 bemerkt worden ist, die Function e^x, und noch allgemeiner, wenn man mit b einen beliebigen constanten Factor bezeichnet, die Function be^x; es ist dies die einzige Function, welche diese Eigenschaft besitzt. Wenn der veränderliche Exponent x mit dem Zeichen — behaftet ist, so wird zwar die primitive Function gleichfalls beständig wieder hervorgebracht, aber die Differentialverhältnisse sind abwechselnd negativ und positiv.

§. 59. Für die trigonometrischen Functionen sin x und cos x findet man

$$\frac{\ldots n\,x}{\ldots x} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d.\cos x}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\ldots \sin x}{\ldots x^2} = -\sin x = \sin(x + \pi), \quad \frac{d^2.\cos x}{dx^2} = -\,\mathrm{coc}\, x = \cos(x + \pi),$$

$$\frac{\ldots \sin x}{\ldots x^3} = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \quad \frac{d^3.\cos x}{dx^3} = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\ldots \sin x}{\ldots x^4} = \sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \frac{d^4.\cos x}{dx^4} = \cos x = \cos(x + 2\pi),$$

$$\frac{\ldots \sin x}{\ldots x^5} = \cos x = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right), \quad \frac{d^5.\cos x}{dx^5} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right),$$

...c. rc.

Die primitiven Functionen kehren nach zwei Differentiationen wieder, mit dem Zeichen — behaftet; nach vier Differentiationen aber mit ihrem eigenen Zeichen.

§. 60. Die hier angegebenen bemerkenswerthen Eigenschaften der einfachen Functionen muß man für die Anwendungen stets gegenwärtig behalten. In gleicher Weise ist es nützlich die Gestalt der Curven zu kennen, welche die in Rede stehenden einfachen Functionen darstellen; zur Discussion dieser Curven bieten die Ausdrücke für die Differentialverhältnisse der beiden ersten Ordnungen eine große Erleichterung dar, gemäß dem im §. 55 Gesagten.

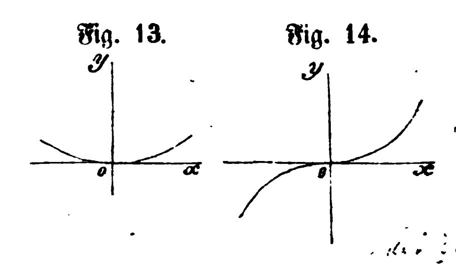
Es sei zuerst

$$y = x^m$$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,x^{m-2}.$$

Die Curve, von welcher x die Abscisse und y die Ordinate ist, hat verschiedene Gestalten, je nach der Beschaffenheit des Exponenten m. Hier soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo dieser Exponent positiv und größer als die Einheit ist.



1) Ist m eine gerade ganze Zahl, so ist y positiv für jeden Werth von x, $\frac{dy}{dx}$ wechselt sein Zeichen zugleich mit x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist immer positiv. Die Curve ist dargestellt in Fig. 13.

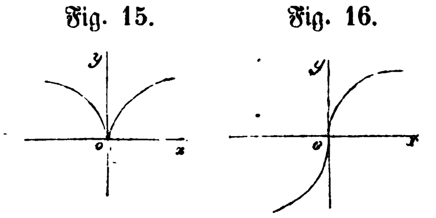
2) Ist m eine ungerade ganze Zahl, so wechselt y sein Zeichen zugleich mit x, $\frac{dy}{dx}$ ist beständig positiv, $\frac{d^2y}{dx^2}$ wechselt sein Zeichen mit x. Die Curve ist dargestellt in Fig. 14.

3) Ist m ein Bruch $= \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, so wird die Curve durch Fig. 13 dargestellt, wenn p gerade und q ungerade ist; dagegen durch Fig. 14, wenn p ungerade und q ungerade ist. Aber wenn q gerade ist, so hört derjenige Theil der Curve, welcher negativen Werthen von x entspricht, auf zu existiren, weil die betreffenden Werthe von y imaginär werden; dafür bekommt die Curve nach der positiven Seite der Abscissen zwei Arme, indem jedem positiven Werthe von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y zugehören.

§. 61. Wenn man zweitens annimmt, der Exponent m sei positiv und kleiner als die Einheit, so weicht dieser Fall von dem vorhergehenden darin ab, daß $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ wird, wo es dort positiv war, und positiv, wo es dort

negativ war. Statt der Fig. 13 hat man jetzt die Fig. 15, und statt der Fig. 14 jetzt die Fig. 16.

Fig. 15. Fig. 16.



Für $m = 1$ wird $\frac{dy}{dx}$ beständig $= 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und die Curve degenerirt zu einer geraden Linie, welche mit der Achse der x einen Winkel von 45° einschließt.

§. 62. Wird endlich der Exponent m negativ angenommen, hat man also

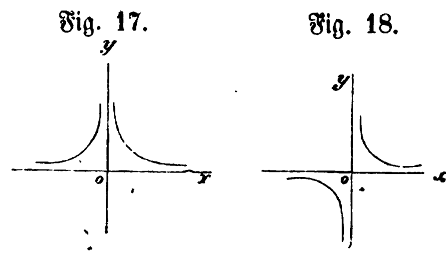
$$y = \frac{1}{x^m}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m}{x^{m+1}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}},$$

wo m eine positive Zahl bedeutet, so wird man leicht von den vorhergehenden Fällen zu den der jetzigen Voraussetzung entsprechenden gelangen, wenn man die Einheit durch die Ordinate derjenigen Curven dividirt, welche in den Fig. 13 bis 16 dargestellt werden. An die Stelle der Fig. 13 u. 15 tritt jetzt Fig. 17, und an die Stelle der Fig. 14 u. 16 tritt jetzt die Fig. 18. Die Achsen werden zu Asymptoten an den Armen der Curve.

Fig. 17. Fig. 18.



§. 63. Für die logarithmische Function hat man

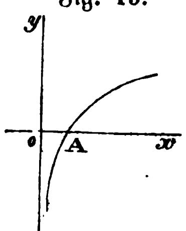
$$y = \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\log e}{x^2}.$$

Die Curve, Fig. 19, hat die Achse der y zur Asymptote nach der Seite der negativen y. Die Abscisse oA des Punktes, in welchem sie die Achse der x schneidet, ist der Einheit gleich. Die Curve besitzt keinen Arm nach der Seite der negativen x.

Fig. 19.



§. 64. Die Exponentialfunction a^x gibt

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = la \, . \, a^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (la)^2 . a^x.$$

Wenn a eine positive Zahl ist und größer als die Einheit, so wächst der Werth der Ordinate nach der positiven Seite der x ohne Aufhören; nach der negativen Seite der x aber hat die Curve, Fig. 20, die Achse der x zur Asymptote. Die Ordinate oB des Punktes, in welchem sie die Achse der y schneidet, ist der Einheit gleich.

Fig. 20.

Wenn man a positiv und kleiner als die Einheit voraussetzt, so verwandelt sich die Function a^x in $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ oder a^{-x}, wo a wieder wie vorhin größer als die Einheit ange-

nommen werden muß. Mithin kommt dieser Fall auf den vorhergehenden zurück, indem man die positiven x für die negativen x setzt, und umgekehrt.

Da überdies die Gleichung $y = a^x$ zur Folge hat $x = \log y$, wenn a als Basis des logarithmischen Systems angesehen wird, so erkennt man leicht, daß die in Rede stehende Curve nicht von der früheren verschieden ist, daß vielmehr Fig. 20 in Fig. 19 übergeht, sobald man die Achsen der x und y unter einander vertauscht.

Wollte man für a in der Function a^x eine negative Zahl annehmen, so würde diese Function aufhören continuirliche Werthe zu liefern; es gäbe keine Curve mehr, sondern es würde nur ein System von isolirten Punkten existiren, entsprechend solchen Werthen von x, welche entweder ganzen Zahlen oder Brüchen mit ungeraden Nennern gleich sind. Aus diesem Grunde wird in der Folge immer, wo es sich um ein beliebiges logarithmisches System handelt, die Voraussetzung gemacht werden, daß die Basis a dieses Systems eine positive Zahl und größer als die Einheit sei.

§. 65. Es möge noch die Function $y = e^{-x^2}$ betrachtet werden, welche in mehreren wichtigen Anwendungen vorkommt. Sie gibt

$$y = e^{-x^2}$$

$$-\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}.$$

Die Curve, Fig. 21, besteht aus zwei gleichen Armen, welch zu beiden Seiten der Achse der y liegen. Die Ordinate oB des Punktes, in welchem sie diese Achse schneidet, ist der Einheit gleich.

Fig. 21.

Das Differentialverhältniß der ersten Ordnung $\frac{dy}{dx}$ wechselt sein Zeichen zugleich mit der Absciſſe x; die Curve erreicht m Punkte B, welcher diesem Wechsel

entspricht, ihre größte Höhe. Das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist negativ, so lange x kleiner bleibt als der Abstand $oP = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und positiv, sobald x diesen Abstand überschreitet. Die Curve wendet also innerhalb des Intervalls MM ihre Concavität nach unten, außerhalb dieses Intervalls aber ihre Convexität. Die beiden Punkte M, M, in denen der Werth des Differentialverhältnisses $\frac{d^2y}{dx^2}$ sein Zeichen wechselt, und für welche dieser Werth zu Null wird, heißen Beugungspunkte (Inflexionspunkte) der Curve.

§. 66. Um endlich die trigonometrischen Functionen zu betrachten, hat man erstlich

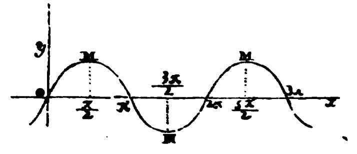
$$y = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

Die Curve, Fig. 22, schneidet die Achse der x in denjenigen Punkten, wo die Abscisse den Bögen 0, π, 2π, 3π rc. gleich ist; in diesen Punkten schließt die Tangente mit den beiden Achsen einen Winkel von 45° ein, weil man daselbst hat $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

Fig. 22.



Die größten Ordinaten, deren Werth der Einheit gleich ist, finden sich in den Punkten M, deren Abscissen betragen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, rc.; das Differentialverhältniß der ersten Ordnung wechselt in diesen Punkten sein Zeichen. Das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung hat dagegen beständig das entgegengesetzte Zeichen von demjenigen der Ordinate, und mithin wendet die Curve ihre

Concavität nach unten, wenn die Ordinate positiv ist, und ihre Convexität, wenn die Ordinate negativ ist. Die Punkte, in denen die Ordinate Null ist, sind zugleich Beugungspunkte. Die Curve erstreckt sich übrigens, sowol nach der Seite der positiven wie der negativen x, ins Unendliche mit einer fortwährenden Wiederkehr von Theilen, welche sämmtlich demjenigen congruent sind, der in dem Intervalle von 0 bis 2π enthalten ist. Man nennt die Function deßhalb eine periodische Function.

§. 67. Man hat in gleicher Weise

$$y = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x.$$

Man erkennt sogleich, daß die Gestalt der Curve vollkommen mit der vorhergehenden übereinstimmen muß, wenn man nur in dieser den Anfangspunkt der Abscissen um das Intervall $\frac{\pi}{2}$ vorwärts legt. Denn man hat immer

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

VII. Differentiale höherer Ordnungen für die Functionen von mehreren Veränderlichen.

---

§. 68. Der Begriff der Differentiale höherer Ordnungen läßt sich leicht auf die Functionen von mehreren Veränderlichen übertragen, da die Differentiation dieser Functionen

immer ausgeführt wird, indem man in Bezug auf jede der Veränderlichen einzeln differentiirt.

Es sei zuerst, wie im §. 40, die zu betrachtende Function

$$z = f(x, y),$$

wo x und y zwei unabhängige Veränderliche bedeuten. Nach dem Früheren wird für diese Function das vollständige Differential der ersten Ordnung ausgedrückt durch

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

oder durch die Summe der beiden partiellen Differentiale $\frac{dz}{dx} dx$ und $\frac{dz}{dy} dy$, welche man erhält, indem man resp. x oder y allein als veränderlich ansieht. Die mit $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ bezeichneten Functionen sind die partiellen Differentialverhältnisse der ersten Ordnung von der gegebenen Function z, genommen resp. in Bezug auf x und in Bezug auf y.

Die Operation des Differentiirens kann nun in gleicher Weise wieder auf den Ausdruck von dz übertragen werden, in welchem man dx und dy wie constante Factoren betrachten wird. Will man das vollständige Differential bilden, so hat man nach einander die Functionen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ in Bezug auf x und in Bezug auf y zu differentiiren. Man erhält also für das vollständige Differential der zweiten Ordnung

$$d^2z = \left(\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx} dx + \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} dy\right) dx + \left(\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx} dx + \right.$$
$$\left. + \frac{d\frac{dz}{dy}}{dy} dy\right) d$$

Aber es ist schon in dem vorhergehenden Abschnitte das

Differentialverhältniß $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx}$ dargestellt worden durch $\frac{d^2z}{dx^2}$,

und nach dieser Analogie kann man auch statt $\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}$ setzen

$\frac{d^2z}{dx\,dy}$. In gleicher Weise schreibt man $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ statt $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dx}$

und $\frac{d^2z}{dy^2}$ statt $\frac{d\frac{dz}{dy}}{dy}$. Dadurch verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck in

$$d^2z = \left(\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dy\,dx}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy$$

oder auch in

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{d^2z}{dy\,dx}\right)dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

In diesem Ausdrucke des vollständigen zweiten Differentials der Function z bedeutet das Zeichen $\frac{d^2z}{dx^2}$ das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung von der gegebenen Function, so genommen, daß x allein als veränderlich angesehen wird. Das Zeichen $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ drückt aus, daß man das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von z so genommen hat, daß x allein als veränderlich gilt, und darauf das Differentialverhältniß von der entstandenen Function $\frac{dz}{dx}$ so, daß y allein als veränderlich angesehen wird. Das Zeichen $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ drückt aus, daß man das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von z so genommen hat, daß y allein als veränderlich gilt, und darauf das Differentialverhältniß

von der entstandenen Function $\frac{dz}{dy}$ so, daß x allein als veränderlich angesehen wird. Endlich $\frac{d^2z}{dy^2}$ bezeichnet das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung von der Function z, so genommen, daß y allein als veränderlich betrachtet wird.

§. 69. Man kann leicht beweisen, daß die beiden Differentialverhältnisse $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ und $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ nothwendig einander gleich sind. Kehrt man nämlich zu den Begriffen der §§. 46 rc. zurück, so erkennt man, daß $\frac{dz}{dx}$ die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

ist, wenn Δx sich der Null nähert. Ebenso ist $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x\,\Delta y} = \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}}{\Delta y},$$

wenn Δx und Δy sich der Null nähern. In gleicher Weise ist $\frac{dz}{dy}$ die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

wenn Δy sich der Null nähert; und $\frac{d^2z}{dy\,dx}$ ist die Gränze des Ausdrucks

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta y\,\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x}$$

wenn Δx und Δy sich der Null nähern. Da nun dieser letzte Ausdruck von dem vorhergehenden nicht verschieden ist, so sind auch ihre Gränzen einander gleich. Also

$$\frac{d^2z}{dy\,dx} = \frac{d^2z}{dx\,dy},$$

d. h. das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung, in Bezug auf die beiden Veränderlichen x und y genommen, ist identisch dasselbe, man mag zuerst nach x und hinterher nach y, oder zuerst nach y und hinterher nach x differentiiren. Man sagt auch kürzer, die Ordnung der Differentiationen habe auf das Resultat keinen Einfluß.

Das im vorigen Paragraphen entwickelte Differential der zweiten Ordnung von der gegebenen Function z kann jetzt geschrieben werden

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2z}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy^2.$$

§. 70. Die Operation des Differentiirens kann wiederum auf diesen Ausdruck angewandt werden, und um das vollständige Differential der dritten Ordnung zu erhalten, wird man die Functionen $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ sowol in Bezug auf x, als auch in Bezug auf y zu differentiiren haben. Beachtet man dabei den so eben bewiesenen Satz, so hat man

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}\,dx^3 + 3\,\frac{d^3z}{dx^2dy}\,dx^2dy + 3\,\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\,dx\,dy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\,dy^3.$$

Wenn man ebenso fortfährt, so findet man allgemein

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2$$
$$+ \ldots + \frac{d^nz}{dy^n}\,dy^n.$$

Die Analogie dieses Ausdrucks mit der Entwickelung der ganzen Potenz eines Binoms fällt in die Augen. Man kann symbolisch schreiben

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy\right)^n,$$

wobei man sich jedoch vorbehalten muß, nach der Entwickelung überall dz^n in d^nz umzuwandeln.

§. 71. Die Fälle, in denen mehr als zwei unabhängige Veränderliche vorliegen, erfordern keine neuen Betrachtungen. Es sei z. B.

$$z = f(v, x, y).$$

Für das vollständige Differential der ersten Ordnung hat man nach §. 41

$$dz = \frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, indem man dv, dx, dy wie constante Factoren ansieht, und zugleich $\frac{dz}{dv}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ wie Functionen der drei Veränderlichen v, x, y, so erhält man für das vollständige Differential der zweiten Ordnung

$$d^2z = \frac{d^2z}{dv^2} dv^2 + \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dvdx} dvdx + \frac{d^2z}{dvdy} dvdy + \frac{d^2z}{dxdy} dxdy\right).$$

Allgemein kann man wieder schreiben

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy\right)^n,$$

wenn man, wie oben, sich vorbehält, nach der Entwickelung überall dz^n in d^nz umzuwandeln.

Ebenso würde es sein, wenn man die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen noch größer annehmen wollte.

VIII. Differentiale höherer Ordnungen für unentwickelte Functionen.

§. 72. Es sei zuerst wieder, wie im §. 44, die Gleichung gegeben

$$f(x, y) = 0,$$

in welcher x die unabhängige Veränderliche bezeichnet und y eine durch Hülfe dieser Gleichung gegebene Function von x. Die Aufgabe ist, die Ausdrücke für die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. der Function y zu finden, ohne jene Gleichung aufzulösen. In dem angezeigten §. hat man schon, durch eine Differentiation, die Differentialgleichung der ersten Ordnung erhalten, nämlich:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0; \qquad \text{woraus} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Differentiirt man nun ein zweites Mal, und berücksichtigt, daß die Functionen $\frac{df}{dx}$ und $\frac{df}{dy}$ im allgemeinen noch beide Veränderliche x und y enthalten, so wie, daß y als Function von x angesehen werden muß, so erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

woraus, wenn man für $\frac{dy}{dx}$ seinen vorigen Werth setzt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}.$$

Diesen Ausdruck erhält man auch, wenn man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ unmittelbar differentiirt.

Auf demselben Wege kann man zur Bildung der höheren Differentialverhältnisse fortgehen.

§. 73. Der angegebene Entwickelungsgang eignet sich auch für diejenigen Fälle, wo eine größere Anzahl von

Veränderlichen so wie von Gleichungen vorliegt. Es kommt immer darauf an, die Operation des Differentiirens wiederholt anzuwenden, und dadurch Differentialgleichungen von höheren und höheren Ordnungen zu bilden, aus denen sich sodann immer die Ausdrücke für die Differentialverhältnisse der Functionen, welche unentwickelt vorliegen, herleiten lassen. Hier möge noch der einfachste Fall nächst dem vorhergehenden betrachtet werden. Es seien die beiden Gleichungen gegeben

$$f(x, y, z) = 0$$
$$F(x, y, z) = 0,$$

in denen x die unabhängige Veränderliche bezeichne, und y und z zwei Functionen dieser Veränderlichen, welche aus jenen Gleichungen bestimmt werden. Differentiirt man diese Gleichungen zum ersten Mal, so erhält man die Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

woraus durch Elimination folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}}.$$

Differentiirt man die vorigen Gleichungen zum zweiten Mal, so erhält man die Differentialgleichungen der zweiten Ordnung

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2f}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} +$$
$$+ \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{df}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2F}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dydz}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} +$$
$$+ \frac{d^2F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dF}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dF}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

woraus man die Ausdrücke für $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ herleiten kann, nachdem man für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ ihre vorigen Werthe substituirt hat.

Diese Ausdrücke für $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ kann man aber auch dadurch finden, daß man die vorigen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ unmittelbar differentiirt.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen erhält man die Differentialverhältnisse höherer Ordnungen von den Functionen y und z.

IX. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

§. 74. Es mußte bereits im §. 2 die Nothwendigkeit hervorgehoben werden, in jedem besondern Falle die unabhängigen Veränderlichen, denen willkürliche Werthe beigelegt werden dürfen, scharf zu unterscheiden von den abhängigen Veränderlichen, welche die Functionen jener ersteren sind. Dieselbe Bemerkung kehrte wieder im §. 44. Die analytischen Operationen, welche die Differentialrechnung ausmachen, stützen sich wesentlich auf die angezeigte Unterscheidung, welche deßhalb im Laufe dieser Operationen strenge festgehalten werden muß; denn die successiven Differentiationen werden immer ausgeführt, indem man die Differentiale der unabhängigen Veränderlichen wie constante Factoren betrachtet, während die

Differentiale der abhängigen Veränderlichen selbst wieder als veränderlich angesehen werden. Man kann indessen mit Hülfe gewisser Umformungen, welche jetzt aus einander gesetzt werden sollen, an die Stelle derjenigen unabhängigen Veränderlichen, welche man anfangs gewählt hatte, im Laufe einer Rechnung neue unabhängige Veränderliche einführen.

Um sich von diesen Umformungen einen richtigen Begriff zu bilden, nehme man an, eine vorgelegte Aufgabe habe zu einer Gleichung geführt wie

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \text{ꝛc.}\right) = 0,$$

in welcher x als unabhängige Veränderliche, und y als Function von x betrachtet worden sei. Die Gleichung drückt eine Beziehung zwischen x, y und den Differentialverhältnissen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. aus, welche letzteren resp. die Gränzen der Verhältnisse darstellen, die unter den gleichzeitigen Aenderungen von x und den Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ꝛc. stattfinden. Man nehme ferner an, x solle aufhören als unabhängige Veränderliche zu gelten, und an deren Statt eine neue eingeführt werden, welche durch t bezeichnet werden mag. Dies ist so zu verstehen, daß jetzt x und y Functionen von t werden sollen; womit jedoch die ursprünglich aufgestellte Abhängigkeit zwischen den beiden Veränderlichen x und y keineswegs soll verloren gegeben werden. Der Zusammenhang, welcher t an die Veränderlichen x und y knüpft, muß gegeben sein; entweder durch eine Gleichung zwischen t und x, wie z. B. $\Phi\ (t,\ x) = 0$, oder durch eine Gleichung zwischen t und y, wie z. B. $\Psi\ (t,\ y) = 0$, oder endlich durch eine Gleichung zwischen allen drei Veränderlichen, wie z. B. $\Pi\ (t,\ x,\ y) = 0$.

Nun ist klar, daß die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,

$\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc., welche in der Gleichung $F=0$ vorkommen, durch andere Differentialverhältnisse der Function y ersetzt werden müssen, welche in Bezug auf t zu nehmen sind. Bei dieser Vertauschung muß aber zugleich die Abhängigkeit des y von x beibehalten werden. Man gelangt dazu ganz einfach durch die Bemerkung, daß, wenn x eine Function von t, und y eine Function von x ist, man nach der Regel des §. 24. hat

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

welcher Ausdruck demnach an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$ in der Gleichung $F=0$ treten muß.

Dieser erste Ausdruck gibt sofort auch diejenigen für die Differentialverhältnisse der höheren Ordnungen. Denn wenn man beide Seiten der letzten Gleichung in Bezug auf t differentiirt, und folglich dt wie constant ansieht, so kommt

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

woraus

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Aus diesem Ausdrucke findet man auf gleiche Weise, indem man in Bezug auf t differentiirt und sodann durch

$\frac{dx}{dt}$ dividirt,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

und so fort.

§. 75. Sobald die hier gefundenen Werthe in die Gleichung $F=0$ substituirt worden sind, so enthält diese Gleichung die Veränderlichen x, y und deren Differentialverhältnisse in Bezug auf t. Wenn man nun eine Gleichung $\Phi(t, x)=0$ zwischen t und x hat, so kann man x nebst seinen Differentialverhältnissen in der Gleichung $F=0$ durch ihre Werthe ersetzen, die man aus der Gleichung $\Phi(t, x)=0$, nach der Regel des §. 72, zieht. Alsdann ist x verschwunden, und die Gleichung $F=0$ enthält nur noch $t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}$, ꝛc. Wenn man dagegen eine Gleichung $\Psi(t, y)=0$ zwischen t und y hat, so kann man ebenso y und die Differentialverhältnisse von y verschwinden lassen, so daß die Gleichung $F=0$ nur noch enthält $t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$, ꝛc. Endlich wenn eine Gleichung $\Pi(t, x, y)=0$ zwischen allen drei Veränderlichen gegeben ist, so kann man nach Gefallen x und y verschwinden lassen, weil diese Gleichung und ihre successiven Differentiale in Bezug auf t (indem man nämlich x und y wie Functionen von t ansieht) die Werthe von $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, ꝛc. als Functionen von $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, ꝛc. geben, und umgekehrt.

Die angezeigten Eliminationen werden übrigens nicht selten durch die Unmöglichkeit, Gleichungen jeder Art allgemein aufzulösen zu können, praktisch unausführbar, in welchem Falle ihre bloße Andeutung genügen muß.

§. 76. Wenn die zwischen t und den übrigen Veränderlichen festgestellte Beziehung darin besteht, daß man setzt $x = t$, so hat man $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3x}{dt^3} = 0$, 2c., und die Formeln des §. 74 verwandeln sich, wie es sein muß, in $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}$, 2c.

Wenn die in Rede stehende Beziehung durch die Gleichung $y = t$ festgestellt wird, so erhält man $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dt^3} = 0$, 2c., und jene Formeln verwandeln sich (indem man y statt t schreibt) in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

2c.

Sobald man also in einer Gleichung zwischen x und y, in welcher anfangs x als unabhängige Veränderliche angesehen worden ist, hinterher y zur unabhängigen Veränderlichen machen will, so muß man in ihr für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, 2c. die vorstehend entwickelten Ausdrücke an die Stelle setzen.

§. 77. Die so eben aufgestellten Formeln führen auch unmittelbar zur Auffindung der Differentiale der umgekehrten Functionen (man sehe §. 35).

Die Gleichung

$$y = lx \quad \text{gibt} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

wo x wie die unabhängige Veränderliche angesehen wird. Will man y zur unabhängigen Veränderlichen machen, so hat man nach dem Vorigen statt $\frac{dy}{dx}$ zu setzen $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, wodurch man erhält

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = x,$$

d. h. indem man für x seinen Werth, ausgedrückt durch y, nämlich e^y setzt,

$$\frac{d.e^y}{dy} = e^y.$$

Die Gleichung

$$y = \sin x \quad \text{gibt} \quad \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

wo x wie die unabhängige Veränderliche angesehen wird. Soll y zur unabhängigen Veränderlichen werden, so hat man zu setzen

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos x, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x}$$

und indem man für x seinen Werth arc sin y setzt, wodurch $\cos x = \sqrt{1 - \sin x^2} = \sqrt{1 - y^2}$ wird,

$$\frac{d.\text{arc}\sin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Die Gleichung

$$y = \text{tang}\, x \quad \text{gibt} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^2}.$$

Folglich

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \cos x^2, \quad \text{oder} \quad \frac{d.\text{arc tang}\, y}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Ebenso könnte man auch in Bezug auf die höheren Differentiale der umgekehrten Functionen verfahren.

§. 78. Die bisherigen Untersuchungen lassen sich leicht auf diejenigen Fälle übertragen, wo die Anzahl der Veränderlichen beträchtlicher ist. Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$F\left(v,\ x,\ y,\ \frac{dy}{dv},\ \frac{dy}{dx},\ \text{ꝛc.},\ z,\ \frac{dz}{dv},\ \frac{dz}{dx},\ \text{ꝛc.}\right) = 0,$$

in welcher v und x zwei unabhängige Veränderliche bezeichnen, y und z aber zwei Functionen dieser Veränderlichen. Will man nun die neuen unabhängigen Veränderlichen s und t einführen, so wird man zu beachten haben, daß v und x jetzt wie Functionen von s und t anzusehen sind, während y und z nach wie vor Functionen von v und x bleiben, und daß man deßhalb nach §. 26 hat

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{ds} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

woraus durch Elimination folgt

$$\frac{dy}{dv} = \frac{\frac{dy}{dt}\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{dv}{ds}}{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{dv}{ds}}.$$

Wenn man jene beiden Ausdrücke für $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dy}{dt}$ wieder in Bezug auf s und t differentiirt, so wird man drei Gleichungen erhalten, aus denen man die Ausdrücke der drei Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dxdv}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$ herleiten kann; und ebenso wird man zu den höheren Differentialverhältnissen von y fortschreiten. Auf gleichem Wege entwickelt man die ähnlichen Ausdrücke für $\frac{dz}{dv}$ und $\frac{dz}{dx}$, so wie für die höheren Differentialverhältnisse von z.

Es ist indessen überflüssig, hier die Aufsuchung dieser allgemeinen Formeln, welche in die Gleichung $F = 0$ substituirt werden müssen, weiter fortzusetzen, weil man in den Anwendungen bequemer das angezeigte Verfahren unmittelbar auf diejenigen analytischen Ausdrücke überträgt, welche der besondere Fall selbst darbietet.

§. 79. Die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen findet vorzüglich in geometrischen Untersuchungen Anwendung, sobald man von einem Coordinatensysteme zu einem andern übergehen will. Es mögen z. B. in der Gleichung

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{rc.}\right) = 0$$

x und y zwei rechtwinklige Coordinaten op und pm, Fig. 23, bedeuten, und man wolle statt x den Winkel ω, den der Radiusvector om mit der Achse der x einschließt, als unabhängige Veränderliche einführen. Man hat in diesem Falle

Fig. 23.

$$\tang \omega = \frac{y}{x}.$$

Differentiirt man diese Gleichung mehrere Male nach einander in Bezug auf ω, indem y und x als Functionen von ω angesehen werden, so erhält man Gleichungen, aus denen die Werthe von $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, rc. entnommen werden können, welche man in die Formeln des §. 74 zu substituiren hat. Die Werthe der Differentialverhältnisse $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, rc., welche diese Formeln sodann darstellen, werden, in die Gleichung $F = 0$ gesetzt, letztere als den gesuchten Zusammenhang unter ω, y, $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, rc. erscheinen lassen.

Wollte man das Coordinatensystem vollständig ändern und statt y die Länge des Radiusvector om, die mit ϱ bezeichnet werden mag, einführen, so würde man ferner setzen

$$y = \varrho \sin \omega.$$

Differentiirt man diese Gleichung mehrere Male nach einander in Bezug auf ω, indem y und ϱ als Functionen von ω angesehen werden, so erhält man Gleichungen, welche die Werthe von $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, ꝛc. liefern, nach deren Substitution in die Gleichung $F=0$ diese nur noch einen Zusammenhang unter ω, ϱ, $\frac{d\varrho}{d\omega}$, $\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$, ꝛc. darstellt.

Diesen letztern Fall kann man aber einfacher erledigen, wenn man unmittelbar setzt

$$x = \varrho \cos \omega, \qquad y = \varrho \sin \omega,$$

und aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{d^2x}{d\omega^2}$, ꝛc. und $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{d^2y}{d\omega^2}$, ꝛc. herleitet. Setzt man diese Werthe in die Formeln des §. 74, so erhält man unmittelbar die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ꝛc. ausgedrückt durch ω, ϱ, $\frac{d\varrho}{d\omega}$, $\frac{d^2\varrho}{d\omega^2}$, ꝛc. und mithin durch deren Substitution in die gegebene Gleichung $F=0$ das verlangte Resultat.

X. Entwickelung einer Function nach ganzen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen. Taylor'scher Lehrsatz.

---

§. 80. Die Betrachtung der Differentialverhältnisse oder derivirten Functionen von höheren Ordnungen gibt die

Mittel an die Hand, um irgend eine Function in eine Reihe zu entwickeln, welche nach ganzen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordnet ist. Es sei die gegebenene Function

$$y = f(x).$$

Kehrt man zu den Begriffen und Bezeichnungen des VI. Abschnittes zurück und setzt die Tabelle des §. 50 weiter fort, so gelangt man durch einfache Substitutionen zu folgender Zusammenstellung der einander entsprechenden Werthe von x und y:

x	$y = y$
$x + \Delta x$	$y_1 = y + \Delta y$
$x + 2\Delta x$	$y_2 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$
$x + 3\Delta x$	$y_3 = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$
. . .	. . . .
. . .	. . . .
$x + n\Delta x$	$y_n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\Delta^3 y + \ldots\ldots + \Delta^n y.$

Der Ausdruck von y_n ist unabhängig von der Beschaffenheit der Function, und kann immer hergestellt werden, so lange die Function nur nicht innerhalb des Intervalles der Werthe x und $x + n\Delta x$ der unabhängigen Veränderlichen unendlich groß wird. Man kann diesen Ausdruck auch schreiben

$$y_n = y + n\Delta y + \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2}\Delta^2 y + \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{2\,.\,3}\Delta^3 y + \ldots\ldots + \Delta^n y$$

oder auch

$$y_n = y + n\Delta x\,\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{(n\Delta x)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{(n\Delta x)^3\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{2\,.\,3}\,\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots\ldots + \Delta^n y.$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wie groß man auch das beständige Intervall Δx so wie die Zahl n voraussetzen mag.

Man nehme nun an, das Intervall $n\Delta x$, welches diejenigen beiden Werthe von x von einander trennt, denen die Werthe y und y_n der Function zugehören, bleibe constant, und man lasse gleichzeitig Δx ohne Aufhören abnehmen und die Zahl n in gleichem Verhältnisse ohne Aufhören zunehmen. Da die vorige Gleichung bei dieser Voraussetzung noch immer bestehen bleibt, so wird sie auch bestehen müssen, wenn man für jedes ihrer Glieder diejenige Gränze setzt, der dasselbe bei fortwährender Abnahme von Δx immer näher kommt. Nun ist aber die gemeinschaftliche Gränze der Brüche $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, 2c. die Einheit, und die Gränzen der Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, 2c. sind die Differentialverhältnisse oder derivirten Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, 2c. Setzt man also zur Abkürzung $n\Delta x = h$, so ergibt sich, daß die Gleichung

$$f(x) = y$$

stets zur Folge hat

$$f(x+h) = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \text{2c.}$$

wofür man auch mittelst der Bezeichnung von Lagrange schreiben kann

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x) + \frac{h^4}{2.3.4}f''''(x) + \text{2c.}$$

Dieser bemerkenswerthe Ausdruck führt nach seinem Erfinder den Namen des Taylor'schen Lehrsatzes oder der Taylor'schen Reihe, und muß als eine der wichtigsten

Grundlagen der Differentialrechnung und ihrer Anwendungen angesehen werden.

§. 81. Der vorige Ausdruck wird oft unter einer andern Form dargestellt. Setzt man nämlich $x=0$ und bezeichnet mit y_0, $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{d^2y_0}{dx^2}$, $\frac{d^3y_0}{dx^3}$, etc. die besonderen constanten Werthe, welche alsdann die Functionen y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. annehmen, so kommt

$$f(h)=y_0+h\frac{dy_0}{dx}+\frac{h^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{h^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{h^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.},$$

oder indem man jetzt x statt h schreibt

$$f(x)=y_0+x\frac{dy_0}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y_0}{dx^2}+\frac{x^3}{2.3}\frac{d^3y_0}{dx^3}+\frac{x^4}{2.3.4}\frac{d^4y_0}{dx^4}+\text{etc.}$$

Diese Formel ist von Stirling gegeben; sie ist jedoch bekannter unter dem Namen der Reihe von Maclaurin, dem man sie allgemein zugeschrieben hat. Mit Hülfe der Bezeichnung von Lagrange schreibt man die Maclaurin'sche Reihe

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0) \\ +\frac{x^4}{2.3.4}f''''(0)+\text{etc.}$$

Diese Reihe, so wie diejenige des §. 80 dienen zur Entwickelung einer Function nach ganzen Potenzen der Veränderlichen x und h. Im allgemeinen erstreckt sich die Reihe ins Unendliche. Nur die ganzen algebraischen Functionen, welche aus Gliedern von der Form ax^m zusammengesetzt sind, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, bringen endliche oder geschlossene Reihen hervor, da die Differentialverhältnisse von ax^m von einer höheren als der $m$ten Ordnung sämmtlich Null werden, wie schon im §. 56 bemerkt wurde. Es ist überdies klar, daß, wenn umgekehrt die Entwickelungen von $f(x+h)$ und von $f(x)$ nur eine be-

gränzte Anzahl von Gliedern enthalten, sie sich alsdann auf ganze Polynome reduciren müssen. Wenn z. B. die derivirten $f^{n+1}(0)$, $f^{n+2}(0)$, ꝛc. sämmtlich Null sind, so hat man bloß

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{2.3\ldots n} f^n(0),$$

folglich ist unter dieser Voraussetzung $f(x)$ eine ganze algebraische Function vom $n$ten Grade.

§. 82. Die Gleichung

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \text{ꝛc.}$$

läßt sich auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten herleiten, welche die Voraussetzung macht, daß man im voraus schon weiß, daß die Function $f(x)$ in eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ꝛc. entwickelt werden könne. Setzt man nämlich

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}$$

und bildet, zur Bestimmung der unbekannten Constanten A, B, C, D, ꝛc., auf beiden Seiten dieser Gleichung die successiven derivirten Functionen, so erhält man

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \text{ꝛc.}$$
$$f''(x) = 2C + 2.3Dx + \text{ꝛc.}$$
ꝛc.

Setzt man nun $x = 0$, so wird

$$A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \tfrac{1}{2} f''(0),\ \text{ꝛc.}$$

und durch Substitution dieser Werthe in die angenommene Gleichung hat man unmittelbar die Maclaurin'sche Reihe.

Auf dieselbe Weise gelangt man auch zu der Taylor'schen Reihe. Man setzt

$$f(x + h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{ꝛc.}$$

und differentiirt mehrere Male nach einander in Bezug auf h, wodurch man erhält

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^2 . f(x+h)}{dh^2} = 2C + 2 . 3Dh + \text{rc.}$$

rc.

Um zu erfahren, was aus diesen Gleichungen wird, wenn man $h = 0$ werden läßt, setze man für einen Augenblick $x + h = u$, also $f(x+h) = f(u)$. Nach der Regel für die Differentiation der Functionen von Functionen hat man sodann

$$\frac{d . f(x+h)}{dh} = f'(u) \frac{du}{dh} = f'(u),$$

und ebenso

$$\frac{d^2 . f(x+h)}{dh^2} = f''(u),$$

und so fort; und demnach werden für $h=0$ die successiven derivirten Functionen

$$\frac{d\ f(x+h)}{dh},\ \frac{d^2 . f(x+h)}{dh^2},\ \text{rc.}$$

sich verwandeln in

$$f'(x),\quad f''(x),\ \text{rc.}$$

Setzt man also jetzt in den obigen Gleichungen $h = 0$, so kommt

$$A = f(x),\ B = f'(x),\ C = \tfrac{1}{2} f''(x),\ \text{rc.}$$

wie dem Taylor'schen Lehrsatze gemäß ist.

Man kann im Vorbeigehen bemerken, daß die beiden Differentialverhältnisse

$$\frac{d . f(x+h)}{dx} \text{ und } \frac{d . f(x+h)}{dh}$$

zu ihrem gemeinschaftlichen Ausdrucke die derivirte Function $f'(u)$ haben, und mithin einander gleich sind; ebenso verhält es sich mit den Differentialverhältnissen der höheren Ordnungen

$$\frac{d^2 . f(x+h)}{dx^2} \text{ und } \frac{d^2 . f(x+h)}{dh^2},\ \frac{d^3 . f(x+h)}{dx^3} \text{ und } \frac{d^3 . f(x+h)}{dh^3},\ \text{rc.}$$

§. 83. Da in der Entwickelung des §. 81 der Werth

von x, so wie in der Entwickelung des §. 80 der Werth von h durch nichts beschränkt wird, so besitzt man demzufolge in dem Taylor'schen und dem Maclaurin'schen Lehrsatze, was höchst beachtenswerth ist, einen Ausdruck für die Function in ihrer ganzen Ausdehnung genommen, und lediglich durch solche Werthe dieser Function und der unendlichen Reihefolge ihrer Differentialverhältnisse bestimmt, welche einem einzigen Werthe von x zugehören. Werden also Werthe einer Function und ihrer sämmtlichen Differentialverhältnisse nur für einen einzigen Werth der unabhängigen Veränderlichen gegeben, so ist damit im allgemeinen die Function selbst gegeben. Indessen erleidet die Allgemeinheit der hier ausgesprochenen Thatsache oft von andern Seiten sehr bedeutende Beschränkungen.

Erstens ist nämlich die Existenz der Taylor'schen so wie der Maclaurin'schen Reihe an die Bedingung gebunden, daß die Function $y = f(x)$ nebst ihren Differentialverhältnissen $f'(x)$, $f''(x)$ rc. für jeden der Werthe von x, welche innerhalb des durch die Zunahme h bezeichneten Intervalles enthalten sind, continuirlich bleibe, also weder sprungweise sich ändere, noch unendlich groß werde. Denn so lange die gegebene Function continuirlich bleibt, d. h. für jede unendlich kleine Aenderung der unabhängigen Veränderlichen auch die Function nur eine unendlich kleine Aenderung erfährt, und so lange überdies dieselbe Eigenschaft auch in allen Differentialverhältnissen der gegebenen Function sich findet, so hat es an sich keinen Widerspruch, daß $f(x)$ oder $f(x+h)$ einer resp. durch den Maclaurin'schen oder den Taylor'schen Lehrsatz gegebenen Reihe gleich sein könne, welche Reihe sodann an derselben Eigenschaft theilnimmt. Wenn aber die Function $f(x)$ oder eine ihrer derivirten Functionen für einen gewissen Werth von x eine Unterbrechung der Continuität erleidet, so findet für diesen

Werth von x nicht mehr ein einziger bestimmter Werth der zugehörigen Function statt, und mithin kann eine Reihe von der obigen Form für diesen Fall nicht mehr die Entwickelung der gegebenen Function darstellen. Man sehe das Weitere hierüber §. 88 ꝛc.

Zweitens ist es wichtig zu bemerken, daß jede der gefundenen Reihen der entsprechenden Function $f(x)$ oder $f(x+h)$ nur gleich sein kann, so lange die Reihe convergent ist, d. h. so lange die Werthe, welche man erhält, indem man allmälig eine größere und größere Anzahl von Gliedern der Reihe zusammennimmt, sich immer mehr einer gewissen Gränze nähern; oder auch, was auf dasselbe hinauskommt, so lange man zwei Gränzen angeben kann, so nahe beisammen als man nur will, zwischen denen jene Werthe immer enthalten sein müssen, wie groß auch die Anzahl der zusammengenommenen Glieder der Reihe werden mag. In einigen Fällen ist die Convergenz einer Reihe sofort zu erkennen; z. B. wenn die Glieder, von einem bestimmten Gliede angerechnet, immer kleiner werden und zugleich abwechselnd positiv und negativ sind, so liefert die successive Summirung augenscheinlich Resultate, welche immer weniger von einander verschieden sind und gegen eine zwischen ihnen liegende Zahl convergiren. Besitzen alle Glieder einerlei Zeichen, so ist die Reihe convergent, wenn alle, von einem bestimmten Gliede angerechnet, kleiner sind als die entsprechenden Glieder einer geometrischen Progression, deren Factor kleiner als die Einheit ist. Dagegen ist sie divergent, wenn alle Glieder, von einem bestimmten Gliede angerechnet, größer sind als diejenigen einer geometrischen Progression, deren Factor die Einheit oder größer als die Einheit ist. Im allgemeinen ist jedesmal eine besondere Untersuchung nöthig, um über die Convergenz oder Divergenz einer vorgelegten Reihe zu entscheiden; jedoch wird

ein specielleres Eingehen auf die Untersuchung hier um so weniger nöthig sein, da sich sogleich (§. 87) für die Ausmittelung der Convergenz solcher Reihen, welche aus dem Taylor'schen oder Maclaurin'schen Lehrsatze hervorgegangen sind, ein anderes Hülfsmittel einstellen wird. *)

§. 84. Nicht allein für die Anwendung der Taylor'schen Reihe auf die numerische Berechnung von Functionswerthen, sondern überall, wo man nur eine beschränkte Anzahl von Gliedern dieser Reihe in Betracht zieht (wie es in den Anwendungen der Differentialrechnung auf Geometrie und Mechanik zu geschehen pflegt), ist es nöthig den Fehler schätzen zu können, welchen man durch Wegwerfung des fehlenden Theils der Reihe begeht, oder wenigstens zwei Gränzen aufzustellen, zwischen denen dieser Fehler nothwendig enthalten ist. Man gelangt zur Bestimmung solcher Gränzen durch eine Betrachtung, welche zugleich als ein dritter Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes gelten kann, der überdies strenger ist als die beiden obigen Beweise §§. 80 und 82.

Zunächst möge folgende einfache Bemerkung vorausgeschickt werden. Gesetzt man habe eine Function $f(h)$, welche für $h = 0$ gleichfalls zu Null wird; bleibt sodann innerhalb des Intervalles von $h = 0$ bis $h = k$ das Differentialverhältniß $\frac{d \cdot f(h)}{dh}$ beständig positiv oder beständig negativ, ohne unendlich zu werden, so kann man behaup-

*) Cauchy hat den sehr merkwürdigen Satz bewiesen, daß die beiden hier aufgeführten Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen, so wie der Maclaurin'schen Reihe in eine einzige zusammenfallen, d. h. daß jede die andere in sich schließt, sobald man die Betrachtung auf imaginäre Veränderliche und Functionen ausdehnt, was jedoch hier nicht bewiesen werden kann.

ten, daß der Werth von $f(h)$, innerhalb desselben Intervalles gleichfalls positiv oder negativ, d. h. von demselben Zeichen wie das Differentialverhältniß sein wird. Denn so lange $\frac{d.f(h)}{dh}$ positiv und endlich ist, muß die Function für wachsende Werthe von h gleichfalls wachsen; so lange aber $\frac{d.f(h)}{dh}$ negativ und endlich ist, muß die Function für wachsende Werthe von h abnehmen (s. §. 55); folglich kann diese Function wegen $f(0) = 0$, im ersten Falle nur positiv, im zweiten Falle nur negativ sein. Diese Schlüsse hören auf richtig zu sein, wenn das Differentialverhältniß oder die Function selbst in dem Intervall von 0 bis h unendlich wird.

Will man nun die Function $f(x+h)$ nach Potenzen von h entwickeln und sich für den Anfang auf das erste Glied $f(x)$ der Entwickelung beschränken, so wird man setzen können

$$f(x+h) = f(x) + h\Pi$$

Hier bezeichnet Π eine Unbekannte, von der man weiß, daß sie, wenn h Null wird, sich in $\frac{d.f(x)}{dx}$ verwandeln muß. Die Aufgabe aber besteht darin, zwei Gränzen P und Q auszumitteln, zwischen denen Π für irgend einen Werth von h stets enthalten ist; man hat also die Bedingungsgleichungen

$$f(x+h) > f(x) + hP$$
$$f(x+h) < f(x) + hQ$$

oder auch

$$f(x+h) - f(x) - hP > 0$$
$$f(x+h) - f(x) - hQ < 0$$

Nun ist nach dem obigen Satze die erste dieser beiden Funktionen (welche für $h = 0$ den Werth Null annehmen)

positiv und die zweite negativ, wenn ihre Differentialverhältnisse in Bezug auf h in dem Intervalle von $h = 0$ bis $h = h$ selbst positiv oder negativ bleiben, ohne unendlich zu werden, d. h. wenn man hat

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - P > 0$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - Q < 0$$

von $h = 0$ bis $h = h$. Dieser Bedingung geschieht offenbar Genüge, wenn man für P den kleinsten und für Q den größten von denjenigen Werthen setzt, welche die Function $\frac{d.f(x+h)}{dh}$ in dem Intervalle von $h = 0$ bis $h = h$ annimmt.

Will man ferner die beiden ersten Glieder $f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx}$ der Entwickelung beibehalten, so wird man, zur Aufsuchung zweier Gränzen für den Rest der Reihe, die Werthe von P und Q durch die Bedingung bestimmen, daß man für jeden Werth von h habe

$$f(x+h) > f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}P$$

$$f(x+h) < f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}Q$$

oder auch

$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}P > 0$$

$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}Q < 0.$$

Nach dem Obigen geschieht diesen beiden Bedingungen Genüge, wenn in dem Intervalle von 0 bis h das Differentialverhältniß der ersten Function, in Bezug auf h genommen, positiv und das der zweiten Function negativ ist, d. h. wenn

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\,P > 0$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\,Q < 0.$$

Aber diesen Bedingungen geschieht wieder Genüge, wenn man abermals in Bezug auf h differentiirt, und setzt

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - P > 0$$

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - Q < 0.$$

Folglich muß man hier für P den kleinsten und für Q den größten von denjenigen Werthen nehmen, welche dem Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung $\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$ in dem Intervalle von 0 bis h angehören.

Will man die drei ersten Glieder $f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$ der Entwickelung beibehalten, so wird man die beiden Gränzen für den Rest der Reihe dadurch bestimmen, daß man die Werthe von P und Q an die Bedingungen knüpft

$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{2.3}P > 0$$

$$f(x+h) - f(x) - h\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^3}{2.3}Q < 0.$$

Diesen Bedingungen geschieht Genüge, wenn man hat

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}P > 0$$

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} - \frac{d.f(x)}{dx} - h\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{h^2}{2}Q < 0.$$

Diesen Bedingungen geschieht wieder Genüge, wenn man hat

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - h\,P > 0$$

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} - \frac{d^2.f(x)}{dx^2} - hQ < 0.$$

Endlich geschieht diesen Bedingungen Genüge, wenn

$$\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3} - P > 0$$

$$\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3} - Q < 0$$

d. h. wenn man für P den kleinsten und für Q den größten der Werthe nimmt, welche die Function $\frac{d^3.f(x+h)}{dh^3}$ in dem Intervalle 0 bis h erreicht.

Wie diese Betrachtungen fortzusetzen sind, ist leicht einzusehen. Man kann in Folge derselben, so lange die Differentialverhältnisse nicht unendlich werden, eine gegebene Function nach der Taylor'schen Reihe entwickeln und, sobald man bei einem beliebigen Gliede abbricht, jederzeit zwei Gränzen angeben, zwischen denen der Werth des vernachlässigten Theils der Reihe enthalten sein muß. Ueberdies kann man bemerken (s. §. 82), daß die Differentialverhältnisse $\frac{d.f(x+h)}{dh}$, $\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2}$, rc. nicht verschieden sind von $\frac{d.f(x+h)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x+h)}{dx^2}$, rc. oder von $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, rc. Demnach kann man die Behauptung aufstellen, daß der Werth der Reihe immer zwischen den Werthen der folgenden beiden Ausdrücke enthalten sein muß

$$f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3} + \ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}P$$

$$f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3} + \ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}Q,$$

wo P und Q resp. den kleinsten und den größten Werth bezeichnen, welchen das Differentialverhältniß $\frac{d^\mu . f(x)}{dx^\mu}$ für alle Werthe der Veränderlichen zwischen x und $x+h$ annehmen kann.

§. 85. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, daß man immer genau den Werth der Reihe hat, wenn man als letztes Glied setzt $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}$ multiplicirt mit einem gewissen Factor, der zwischen P und Q enthalten ist. Dieses Glied wird der Rest der Taylor'schen Reihe genannt. Der bezeichnete Factor aber ist nothwendig identisch mit einem von den Werthen, welche die Function $\frac{d^\mu . f(x)}{dx^\mu}$ in dem Intervalle von x bis $x+h$ annehmen muß. Bezeichnet man also mit θ eine zwischen 0 und 1 enthaltene, aber im allgemeinen nicht näher bestimmte Zahl, so kann man endlich als allgemeinen Ausdruck der Taylor'schen Reihe, mit Einschluß ihres Restes, schreiben

$$f(x+h = f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\ldots$$
$$\ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}\frac{d^\mu.f(x+\theta h)}{dx^\mu},$$

oder

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}f^\mu(x+\theta h).$$

Z. B. für $\mu = 1, 2, 3,$ rc. erhält man

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{d.f(x+\theta h)}{dx}$$

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}$$

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{d.f(x)}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2.f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{2.3}\frac{d^3.f(x+\theta h)}{dx^3}$$

2c.

oder

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{2.3}f'''(x+\theta h)$$

2c.

welche Gleichungen also die Taylor'sche Reihe mit Einschluß des Restes darstellen, sobald man diese Reihe mit dem ersten, oder zweiten, oder dritten Gliede abbrechen will.

Den Rest der Taylor'schen Reihe schreibt man zuweilen auch

$$\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}\frac{d^\mu.f(x\ldots x+h)}{dx^\mu}, \text{ oder } \frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}f^\mu(x\ldots x+h),$$

um anzuzeigen, daß man für x unter das Functionszeichen einen von den Werthen der Veränderlichen zu setzen hat, welche zwischen x und $x+h$ enthalten sind. Dieser Werth ist im allgemeinen unbekannt; aber man weiß, daß man eine obere Gränze für $f(x+h)$ erhält, wenn man denjenigen Werth setzt, der $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ so groß wie möglich macht, und eine untere Gränze, wenn man denjenigen Werth setzt, der $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ so klein wie möglich macht. In dem besonderen Falle, wo die Function $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ von $x=x$ bis $x=x+h$ beständig wächst oder beständig abnimmt, werden die genannten Gränzen durch diejenigen beiden Werthe von $\frac{d^\mu.f(x)}{dx^\mu}$ dargestellt, welche den Werthen $x=x$ und $x=x+h$ selbst zugehören.

§. 86. Man kann, wie im §. 81, in der vorhergehenden Formel $x = 0$ setzen, und sodann x statt h schreiben, wodurch man als allgemeinen Ausdruck der Maclaurin'schen Reihe, mit Einschluß ihres Restes, erhält

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{2.3} f'''(0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^\mu}{2.3.4\ldots\mu} f^\mu(\theta x),$$

z. B. für $\mu = 1, 2, 3,$ rc.

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta x)$$
$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$$
$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{2.3} f'''(\theta x)$$

rc.

wo θ wieder eine nicht näher bestimmte, aber zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet. Man erhält wie vorhin zwei Gränzen, zwischen denen der Werth von $f(x)$ nothwendig enthalten sein muß, wenn man in dem allgemeinen Ausdrucke des Restes der Reihe statt $f^\mu(\theta x)$ den kleinsten und den größten Werth setzt, welchen dieses Differentialverhältniß in dem Intervalle 0 bis x annehmen kann. *)

§. 87. Mit Hülfe des hier entwickelten Ausdrucks für den Rest der Taylor'schen Reihe, welchen Lagrange gegeben hat, verschwindet nun zugleich auch jede Ungewißheit rücksichtlich der Convergenz dieser Reihe. Die Reihe ist nämlich nothwendig convergent und hat zur Summe $f(x+h)$, wenn der Werth des ergänzenden Gliedes $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu} \frac{d^\mu f(x+\theta h)}{dx^\mu}$

*) Cauchy hat den Rest der Taylor'schen so wie der Maclaurin'schen Reihe unter einer neuen Form dargestellt, worüber man den Zusatz I am Schlusse dieses Bandes sehe.

kleiner wird als jede gegebene Größe, sobald man μ ohne Aufhören wachsen läßt. Man kann insbesondere bemerken, daß diese Bedingung immer erfüllt wird, wenn sich eine bestimmte Zahl N angeben läßt, welche der absolute Werth des Factors $\frac{d^\mu . f(x+\theta h)}{dx^\mu}$ niemals überschreitet, wie groß man auch μ annehmen mag. Denn der Factor $\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu} = h\frac{h}{2}\frac{h}{3}\frac{h}{4}\ldots\frac{h}{\mu}$ hat zur Gränze den Werth Null, wenn μ größer und größer wird.

Fälle, in denen für gewisse besondere Werthe der Veränderlichen die Taylor'sche Reihe nicht die Entwickelung einer gegebenen Function liefert.

§. 88. Die Existenz der Taylor'schen Reihe ist nach §. 83 an die Bedingung gebunden, daß die Function $y = f(x)$ nebst ihren Differentialverhältnissen $f'(x)$, $f''(x)$, ꝛc. für denjenigen Werth von x, von welchem aus die mit h bezeichnete Zunahme gerechnet wird, continuirlich bleibe, und insbesondere, daß sie nicht unendlich werde. Im entgegengesetzten Falle ist die Reihe nicht mehr anwendbar. Es sei z. B. die Function $f(x)$ von der Gestalt $\frac{F(x)}{(x-a)^m}$, wo m eine positive ganze Zahl, und $F(x)$ eine Function von x bezeichnet, welche für $x = a$ weder Null noch unendlich wird. Wenn man, gemäß den vorigen Regeln $\frac{F(x+h)}{(x+h-a)^m}$ in eine Reihe entwickelt, die nach ganzen Potenzen von h geordnet ist, so werden alle Glieder dieser Reihe unendlich werden sobald man in ihnen $x = a$ setzt. Die Function aber hat dessen ungeachtet einen bestimmten Werth, nämlich $\frac{F(a+h)}{h^m}$. Da jedoch die selbständige Entwickelung dieses Werthes nach Potenzen von h nothwendig

negative Potenzen dieser Größe liefern muß, so sieht man leicht, daß sie durch die Taylor'sche Reihe nicht mehr gegeben werden kann.

§. 89. Es sei ferner die Function $\log x$ gegeben. Alle Glieder der Entwickelung von $\log(x+h)$ werden unendlich, sobald man darin $x=0$ setzt. Die Function selbst aber hat alsdann einen bestimmten Werth, nämlich $\log h$; jedoch kann dieser Werth nicht durch eine Reihe dargestellt werden, welche nach ganzen Potenzen von h geordnet ist, weil $\log h = -\infty$ wird für $h=0$.

§. 90. Die Taylor'sche Reihe liefert, der Natur der Sache gemäß, auch dann unbestimmte Resultate, wenn die vorgelegte Function $f(x)$ Wurzelgrößen enthält, welche durch den besondern Werth, den man dem x beigelegt hat, sowol in der Function selbst als auch in den Differentialverhältnissen derselben verschwinden. Um sich davon eine deutliche Vorstellung zu machen, muß man beachten, daß eine Wurzelgröße von der Form $\sqrt[q]{(x-a)^p}$, wo p und q ganze Zahlen bedeuten, derjenigen Function $f(x)$, in welcher sie vorkommt, eben so viele verschiedene reelle oder imaginäre Werthe gibt, als die Zahl q Einheiten enthält. Da ferner diese Wurzelgröße sich auch in den Differentialverhältnissen der Function wieder einstellt, so werden die Differentialverhältnisse, wie es sein muß, gleichfalls q Werthe liefern. Man hat also gleichsam eben so viele getrennte und von einander verschiedene Entwickelungen der gegebenen Function, wie die in Rede stehende Wurzelgröße Werthe enthält. Sobald man aber dem x den besonderen Werth a beilegt, so verschwindet die Wurzelgröße aus allen Gliedern der Reihe, während sie in der Function bestehen bleibt, wo sie alsdann wird $\sqrt[q]{h^p}$. Also kann die Reihe alsdann nicht mehr die Function darstellen, weil diese mehrere Werthe besitzt,

während jene nur einen einzigen liefert. Die Analysis löst diesen Widerspruch dadurch, daß sie die Glieder der Reihe unendlich werden läßt, so daß diese mithin keinen bestimmten Werth mehr darstellt.

Die Entwickelung der Function $f(x)$ muß in dem vorliegenden Falle Glieder mit dem Factor $h^{\frac{p}{q}}$ enthalten. Man findet die gesuchte Reihe, wenn man in der gegebenen Function $x = a + h$ setzt, und $f(a + h)$ aus der Natur dieser Function selbst entwickelt. Die gebrochenen Potenzen von h werden in dieser letzteren Entwickelung zum Vorschein kommen.

§. 91. Es sei z. B.

$$f(x) = 2ax - x^2 + a\sqrt{x^2 - a^2},$$

so erhält man

$$\frac{d.f(x)}{dx} = 2(a - x) + \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = -2 + \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{ax^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$$

ꝛc.

Setzt man $x = a$, so wird $f(x) = a^2$, und die Differentialverhältnisse aller Ordnungen werden unendlich. Dieses zeigt an, daß die Entwickelung von $f(x + h)$ hier für $x = a$ gebrochene Potenzen von h enthalten muß. Die Function wird alsdann in der That

$$f(a + h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h}\sqrt{2a + h}$$

und die Entwickelung dieses Ausdrucks nach Potenzen von h liefert Glieder mit den Factoren $h^{\frac{1}{2}}, h^{\frac{3}{2}}, h^{\frac{5}{2}}$, ꝛc.

§. 92. Man muß übrigens bemerken, daß eine Wurzelgröße, welche in der Function $f(x)$ enthalten ist, auf zwei verschiedene Arten verschwinden kann, sobald man der Veränderlichen x einen besondern Werth beilegt, näm-

lich: 1) indem diejenige Größe zu Null wird, welche unter dem Wurzelzeichen steht; 2) indem ein Factor zu Null wird, mit welchem die Wurzelgröße behaftet ist. Im ersten Falle kann die Entwickelung, welche aus der Taylor'schen Reihe herfließt, für den in Rede stehenden besonderen Werth von x niemals mit der Function $f(x+h)$ zusammenfallen, wovon sich im §. 90 der Grund angegeben findet. Im zweiten Falle dagegen verhält sich die Sache anders, weil der die Wurzelgröße begleitende Factor, welcher in der gegebenen Function zu Null wird, in den Differentialverhältnissen höherer Ordnungen aus seiner Verbindung mit der Wurzelgröße heraustreten kann, so daß diese nicht mehr verschwindet, und mithin die Reihe wirklich die nöthige Anzahl von Werthen liefert. Auf Fälle dieser Art ist mithin die Taylor'sche Reihe anwendbar.

§. 93. Wenn z. B. die Function gegeben ist

$$f(x) = (x-a)^m \sqrt{x-b},$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, so findet man

$$\frac{d.f(x)}{dx} = m(x-a)^{m-1}\sqrt{x-b} + \frac{(x-a)^m}{2\sqrt{x-b}},$$

$$\frac{d^2.f(x)}{dx^2} = m(m-1)(x-a)^{m-2}\sqrt{x-b} + \frac{m(x-a)^{m-1}}{\sqrt{x-b}}$$

$$- \frac{(x-a)^m}{4\sqrt{(x+b)^3}},$$

2c.

Mit jeder Differentiation verschwindet im ersten Gliede einer der Factoren von $(x-a)^m$. Nach m Differentiationen werden diese Factoren vollständig verschwunden sein, und folglich wird die Annahme $x = a$, welche die Differentialverhältnisse der m ersten Ordnungen zu Null macht, in allen übrigen Differentialverhältnissen die Wurzelgröße $\sqrt{x-b}$ bestehen lassen.

Bestimmung der Werthe, welche sich unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen.

§. 94. Die vorstehenden Entwickelungen lassen sich unmittelbar anwenden, um den Werth eines Bruches wie

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

auszumitteln, wenn dieser für einen gewissen Werth $x = a$ der Veränderlichen sich in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ verwandelt.

Wenn man unter der Voraussetzung, daß der Werth $x = a$ sowol den Zähler $f(x)$ als auch den Nenner $F(x)$ zu Null macht, für denselben Werth $x = a$ den Werth des Bruches zu kennen verlangt, so kann man darunter offenbar nichts anderes verstehen, als die Aufsuchung der Gränze

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)},$$

welcher der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ ohne Aufhören näher und näher kommt, während x sich immer mehr dem Werthe a nähert. Dieser Gränzausdruck läßt sich auch vertauschen mit

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)}$$

wo h sich immer mehr dem Werthe Null nähern muß.

Nun kann man, so lange die Veränderliche x unbestimmt bleibt, vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes schreiben

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)} = \frac{f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \text{ꝛc.}}{F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) + \frac{h^3}{2.3} F'''(x) + \text{ꝛc.}}$$

Wenn man sodann die Voraussetzung macht, daß weder im Zähler noch im Nenner, sobald man für x den besonderen Werth a setzt, einer der in den §§. 88 ꝛc. betrachteten Aus-

nahmefälle eintritt, so hat man, wegen $f(a) = 0$ und $F(a) = 0$,

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a) + \frac{h}{2} f''(a) + \frac{h^2}{2.3} f'''(a) + \text{ꝛc.}}{F'(a) + \frac{h}{2} F''(a) + \frac{h^2}{2.3} F'''(a) + \text{ꝛc.}}.$$

Läßt man hier endlich h kleiner und kleiner werden, so wird

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

d. h. der gesuchte Werth ist gleich dem Quotienten der Differentialverhältnisse oder derivirten Functionen der ersten Ordnung von den gegebenen Functionen $f(x)$ und $F(x)$, in denen man $x = a$ gesetzt hat.

Sollte der Werth $x = a$ die beiden Differentialverhältnisse der ersten Ordnung gleichfalls zu Null machen, so würde man auf demselben Wege finden

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f''(a)}{F''(a)},$$

und so fort. Allgemein hat man für den Werth des vorgelegten Bruches stets den Quotienten der ersten beiden Differentialverhältnisse gleicher Ordnung zu nehmen, welche für den Werth $x = a$ nicht zugleich verschwinden.

Wenn aber das erste Differentialverhältniß, welches im Zähler nicht verschwindet, nicht von der nämlichen Ordnung ist wie das erste Differentialverhältniß, welches im Nenner bestehen bleibt, so wird augenscheinlich der gesuchte Werth entweder Null oder unendlich groß, je nachdem die Anzahl der verschwindenden Glieder im Zähler oder im Nenner die beträchtlichere ist.

§. 95. Wenn man annimmt, daß die beiden Functionen $f(x)$ und $F(x)$, oder auch nur eine in ihnen, nicht nach ganzen Potenzen von h entwickelt werden können, sobald man dem x den besonderen Werth a gibt, s. §§. 88 ꝛc.;

so ist die vorige Regel nicht mehr anwendbar. Alsdann wird man, um den Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ zu finden, Zähler und Nenner des Bruches $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$ in Reihen entwickeln, welche negative oder gebrochene Potenzen von h enthalten, und nach Ausscheidung des gemeinschaftlichen Factors im Zähler und Nenner $h = 0$ setzen.

§. 96. Es sei gegeben

$$1)\quad \frac{x - x^{n+1}}{1 - x},$$

man sucht den Werth dieses Bruches für $x = 1$. Der Quotient der Differentialverhältnisse der ersten Ordnung von Zähler und Nenner ist

$$\frac{1 - (n+1)x^n}{-1},$$

und setzt man hierin $x = 1$, so erhält man n. In der That ist die gegebene Function nichts anderes als die Summe der geometrischen Reihe $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$.

Es sei gegeben

$$2)\quad \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

welcher Bruch das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von dem vorhergehenden Bruche ist, und demnach die Summe der Reihe $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ darstellt. Man sucht seinen Werth für $x = 1$. Der Quotient der Differentialverhältnisse der ersten Ordnung ist

$$\frac{-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n}{-2(1-x)}.$$

Da derselbe wieder $\frac{0}{0}$ wird, wenn man $x = 1$ setzt, so geht man zu dem Quotienten der Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung, nämlich

$$\frac{-(n-1)n(n+1)x^{n-2} + n^2(n+1)x^{n-1}}{2}.$$

Für $x = 1$ erhält man hieraus $\frac{n(n+1)}{2}$ als gesuchten Werth.

Es sei ferner gegeben

$$3) \quad \frac{l(1+x)}{x^n},$$

man sucht den Werth dieses Bruches für $x = 0$, vorausgesetzt daß n eine positive Zahl bezeichnet. Als Quotienten der Differentialverhältnisse von Zähler und Nenner hat man

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{n x^{n-1}},$$

folglich findet man als Werth des gegebenen Bruchs für $x = 0$ entweder ∞, oder 1, oder 0, je nachdem der Exponent $n > 1$, $= 1$, < 1 war.

Ebenso verhält es sich mit den Brüchen $\frac{e^x - 1}{x^n}$ und $\frac{\sin x}{x^n}$, wo n gleichfalls eine positive Zahl bezeichnet. Was den Bruch $\frac{1 - \cos x}{x^n}$ betrifft, so muß man zu den Differentialverhältnissen der zweiten Ordnung übergehen, wodurch man erhält $\frac{\cos x}{n(n-1)x^{n-2}}$. Also wird der Werth des Bruches für $x = 0$ entweder ∞, oder $\frac{1}{2}$, oder 0, je nachdem der Exponent $n > 2$, $= 2$, < 2 war. Man erkennt zugleich, daß, wenn x kleiner als jede gegebene Größe oder unendlich klein ist, $1 - \cos x$ unendlich klein ist in Bezug auf x oder in Bezug auf $\sin x$.

§. 97. Wenn dagegen eine Function gegeben ist, wie z. B.

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

deren Werth angegeben werden soll, wenn $x = a$ gesetzt

wird, so liegt derjenige Fall vor, wo Zähler und Nenner nicht nach ganzen Potenzen von h entwickelt werden können, wenn man $x+h$ an die Stelle von x setzt. Die Differentialverhältnisse von Zähler und Nenner werden sämmtlich unendlich groß, wenn in ihnen $x=a$ angenommen wird. Man wird also nach §. 95 unmittelbar $x=a+h$ setzen, wodurch man erhält

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a+h}\,.\,\sqrt{h}},$$

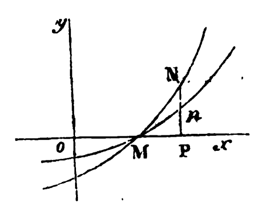
und wenn man hierin nach Potenzen von h entwickelt und sodann den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{h}$ im Zähler und Nenner unterdrückt, so kommt

$$\frac{1+\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{a}}-\text{ic.}}{\sqrt{2a}+\frac{h}{2\sqrt{2a}}-\text{ic.}}$$

Man hat also, indem man $h=0$ setzt, als gesuchten Werth $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

§. 98. Man kann sich von den gewonnenen Resultaten auch auf geometrischem Wege leicht Rechenschaft geben. Es sei $\frac{f(x)}{F(x)}$ der gegebene Bruch, und Mn so wie MN, Fig. 24., mögen diejenigen beiden Curven darstellen, deren Ordinaten resp. durch $f(x)$ und $F(x)$ gegeben sind. Jener Bruch drückt sodann das Verhältniß $\frac{Pn}{PN}$ zweier Ordinaten der beiden Curven aus, welche einem und dem nämlichen Werthe oP der Abscisse x entsprechen. Da ferner die

Fig. 24.



Functionen $f(x)$ und $F(x)$ zu Null werden sollen, sobald $x = a$ gesetzt wird, so folgt nothwendig, daß beide Curven einander in einem Punkte der Achse x treffen müssen, welcher in einem Abstande $oM = a$ vom Anfangspuncte liegt. Sucht man also den Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$, so verlangt man damit nichts anderes als die Gränze, der das Verhältniß der beiden Ordinaten Pn und PN immer näher kommt, wenn der Abstand MP immer mehr abnimmt. Diese Gränze ist augenscheinlich das Verhältniß der trigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel, welche die beiden im Puncte M an die Curven gelegten Tangenten mit der Achse der x einschließen; also $\frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Wenn die beiden Differentialverhältnisse $f'(x)$ und $F'(x)$ für den Werth $x = a$ gleichfalls zu Null werden, so haben die beiden Curven im Punkte M die Achse der x zur gemeinschaftlichen Tangente. Die Gränze des Verhältnisses unter den beiden Ordinaten wird alsdann gegeben werden durch den Bruch $\frac{f''(a)}{F''(a)}$; denn wie sich in der Folge zeigen wird, so ist in diesem Falle das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung proportional dem Intervalle, um welches sich die Curve von der Achse der x entfernt, sobald man auf dieser Achse, vom Berührungspunkte aus, um einen unendlich kleinen Weg fortschreitet.*)

---

*) Eine zweite unbestimmte Form, unter welcher ein Functionswerth auftreten kann, ist die Form $\frac{\infty}{\infty}$, über welche man den Zusatz II. am Schlusse dieses Bandes nachsehe. Man wird übrigens leicht bemerken, daß alle sonstigen unbestimmten Formen, auf welche eine gegebene Function für einen gewissen Werth der Veränderlichen führen kann, z. B. die Differenz $\infty - \infty$, das Product $0 \,.\, \infty$,

XI. Entwickelung der einfachen Functionen von einer Veränderlichen.

---

1. Function x^m.

§. 99. Die Ausdrücke für die Differentialverhältnisse höherer Ordnungen von der Function x^m sind bereits im §. 56 gegeben. Man hat allgemein

$$\frac{d^\mu . x^m}{dx^\mu} = m(m-1)(m-2) \ldots . (m-\mu+1)\, x^{m-\mu}.$$

Der Taylor'sche Lehrsatz liefert demnach für $(x+h)^m$, indem man zugleich nach §. 84 auch den Rest der Reihe in Betracht zieht, folgenden Ausdruck

---

die Potenzen 0^0, ∞^0, 1^∞, ꝛc. sich immer durch angemessene Umformung der gegebenen Function (bei den Potenzen insbesondere durch Uebergang zu ihren Logarithmen) auf eine der Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ müssen zurückführen lassen.

Z. B. Die Function $\frac{a^x}{x} - \frac{b^x}{x}$ liefert für $x = 0$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$. Schreibt man diese Function aber $\frac{a^x - b^x}{x}$, so hat man sofort $\frac{0}{0}$, welches wie oben weiter zu behandeln ist.

Die Function $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ liefert für $x = 0$ die unbestimmte Form 1^∞. Der Neper'sche Logarithmus dieser Function ist aber $\frac{l(1+x)}{x}$, welcher Ausdruck sich in $\frac{0}{0}$ verwandelt und nach §. 96 den Werth 1 hat; folglich ist der Functionswerth selbst $= e$. In diesem Beispiele wird man ein schon früher (§. 16) auf anderem Wege gewonnenes Resultat wieder erkennen.

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}h^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{2.3\ldots\ldots\mu}(x+\theta h)^{m-\mu}h^{\mu},$$

wo θ, wie früher, eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bezeichnet.

Da der Werth von θ sonst nicht näher bekannt ist, so kann man im allgemeinen auch den Betrag des Restes für besondere Annahmen, welche man für x und h treffen mag, niemals bestimmt angeben, sondern höchstens nur zwischen zwei Gränzen einschließen. So lange man aber den absoluten Werth von x größer voraussetzt als denjenigen von h, und x und h einerlei Vorzeichen besitzen, so läßt sich allgemein beweisen, daß der Betrag jenes Restes für hinlänglich große Werthe von μ kleiner und kleiner wird und endlich für $\mu = \infty$ verschwindet. In diesem Falle liegt nämlich der absolute Werth von $x + \theta h$ zwischen denen von x und $x + h$, folglich auch der absolute Werth des Factors $(x + \theta h)^{m-\mu}$ zwischen denen von $x^{m-\mu}$ und $(x + h)^{m-\mu}$, so daß der Werth der ganzen Entwickelung zwischen denjenigen beiden Werthen enthalten ist, welche diesen beiden Gränzen entsprechen. Setzt man aber die Entwickelung um ein Glied weiter fort, so werden die beiden Gränzen, zwischen denen jetzt der Rest enthalten ist, gleich sein den beiden vorigen Gränzen, multiplicirt resp. mit den Brüchen

$$\frac{m-\mu}{\mu+1}\frac{h}{x} \quad \text{und} \quad \frac{m-\mu}{\mu+1}\frac{h}{x\left(1+\frac{h}{x}\right)}.$$

Der absolute Werth dieser beiden Brüche bleibt, für sehr große Werthe von μ bis $\mu = \infty$, beständig kleiner als

die Einheit, wenn $\frac{h}{x}$ selbst kleiner als die Einheit ist. Die beiden Gränzen, zwischen denen der Rest der Reihe liegt, nehmen also ohne Aufhören ab, während μ zunimmt, und verschwinden endlich, gleichwie dieser Rest selbst, für $\mu = \infty$. Die unendliche Reihe

$$x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3}h^3 + \text{etc.}$$

ist mithin convergent, und gleich $(x+h)^m$. Aber sie würde divergent sein, obgleich sie in ihren ersten Gliedern den Anschein von Convergenz besitzen könnte, wenn $\frac{h}{x} > 1$ wäre.

Dieser Satz gilt noch dann, wenn x und h entgegengesetzte Vorzeichen haben, und selbst wenn sie imaginär sind; doch würde er für diese Fälle einen besondern Beweis erfordern.

§. 100. Dividirt man beide Seiten der vorigen Gleichung durch x^m, und schreibt sodann x an die Stelle von $\frac{h}{x}$, so hat man

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots \mu}(1+\theta x)^{m-\mu}x^\mu.$$

Diese Reihe wird, wenn man $\mu = \infty$ werden läßt, zu einer unendlichen Reihe, welche convergirt, so lange $x < 1$ und > -1 angenommen wird.

Im Vorstehenden ist der allgemeine Beweis der Newton'schen Binomialformel enthalten, welche in den Elementen nur für den Fall gegeben wird, wo der Exponent m eine positive ganze Zahl ist.

2. Logarithmische Function log x.

§. 101. Man hat nach den §§. 19 und 57

$$\frac{d^\mu . \log x}{dx^\mu} = \pm \log e . \frac{2.3.4....(\mu-1)}{x^\mu},$$

wo das obere oder das untere Vorzeichen genommen werden muß, je nachdem μ ungerade oder gerade ist. Folglich wird nach dem Taylor'schen Lehrsatze und seiner Ergänzung §. 85 der Werth von $\log(x+h)$ ausgedrückt durch

$$\log(x+h) = \log x + \log e . \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots \pm \frac{h^\mu}{\mu(x+\theta h)^\mu}\right).$$

Der Rest der Reihe reducirt sich für $\mu = \infty$ auf Null, vorausgesetzt daß das Verhältniß $\frac{h}{x}$ die Einheit nicht überschreitet. Man überzeugt sich davon durch die Bemerkung, daß die beiden Gränzen, welche diesen Rest zwischen sich fassen, gleich sind den Factoren $\frac{h^\mu}{\mu x^\mu}$ und $\frac{h^\mu}{\mu(x+h)^\mu}$ multiplicirt mit $\pm \log e$. Dieses setzt jedoch voraus, daß x und h einerlei Vorzeichen haben; wären diese Vorzeichen verschieden, so würde es eines andern Beweises bedürfen, der jedoch hier unterdrückt werden mag.

Die Basis des logarithmischen Systems ist in der gegebenen Gleichung vollkommen willkürlich. Wollte man die Zahl e zur Basis annehmen, so würde man $\log e = 1$ zu setzen haben.

§. 102. Nimmt man $x = 1$, und schreibt sodann x an die Stelle von h, so erhält man

$$\log(1+x = \log e . \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}\right)$$

Für Neper'sche Logarithmen, deren Basis $= e$ ist, hat man einfacher

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^\mu}{\mu(1+\theta x)^\mu}.$$

Beide Reihen sind convergent, so lange x zwischen $+1$ und -1 enthalten ist.

Setzt man $x=1$, so wird aus der letzten Gleichung

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{ꝛc.};$$

setzt man aber $x=-1$, so wird

$$l0 = -\infty = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc.}\right)$$

Die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc.}$ ist demnach keine convergirende Reihe, sondern ihre Summe wächst, wenn man mehr und mehr Glieder zusammennimmt, über jede beliebig große Zahl hinaus.

Wenn man die beiden Gleichungen addirt

$$\log(1+x) = \log e \,.\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\log(1-x) = \log e \,.\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ꝛc.}\right),$$

so kommt

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\log e \,.\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.}\right).$$

§. 103. Gestützt auf diese Formeln läßt sich der Weg auf welchem man die Berechnung der logarithmischen Tafeln ausgeführt hat, in der Kürze angeben wie folgt. Die Reihe für $\log(1+x)$ verwandelt sich, wenn man $x = y-1$ setzt, in

$$\log y = \log e.\left[y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\text{ꝛc.}\right]$$

oder für Neper'sche Logarithmen in

$$ly = y-1-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\text{ꝛc.}$$

Diese Reihen sind zur Berechnung nur brauchbar, so lange die Zahl y sehr wenig von der Einheit verschieden ist. Wenn man aber setzt $y = \sqrt[r]{z}$, wo r eine beliebige Zahl

sein kann, so erhält man aus der erstern Reihe

$$\log z = r \log e . \left[\sqrt[r]{z} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{z} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{z} - 1)^3 - \text{2c.} \right],$$

und wenn die Zahl r negativ genommen wird,

$$\log z = r \log e . \left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 + \text{2c.} \right].$$

Diese beiden Reihen werden convergiren, sobald man die Zahl r so wählt, daß in der ersteren $\sqrt[r]{z} < 2$, in der zweiten dagegen $\sqrt[r]{z} > \frac{1}{2}$ wird. Da überdies die erste Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, während die Glieder der zweiten Reihe sämmtlich positiv sind, so hat man

$$\log z < r \log e \, (\sqrt[r]{z} - 1) \text{ und } \log z > r \log e \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Hiemit sind zwei Gränzen gegeben, welche man einander beliebig nahe bringen kann, indem man den Exponenten r der Wurzelgröße wachsen läßt.

§. 104. Zum Behufe der Berechnung muß sodann $\log e$ bekannt sein. Es sei a die Basis desjenigen Systems, dem $\log z$ angehört, so hat man $e = a^{\log e}$, und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Neper'schen Logarithmen nimmt, $1 = \log e \, . \, la$, woraus $\log e = \frac{1}{la}$. Ferner gibt der Ausdruck von ly im vorigen §., wenn man darin $y = a$ setzt,

$$la = \frac{1}{\log e} = a - 1 - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \text{2c.}$$

woraus man wie dort weiter schließt

$$la = \frac{1}{\log e} = r \left[\sqrt[r]{a} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{a} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{a} - 1)^3 - \text{2c.} \right]$$

$$la = \frac{1}{\log e} = r \left[1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3 + \text{2c.} \right].$$

Die Zahl $\log e$ stellt, vermöge der obigen Formeln, denjenigen Factor dar, mit welchem man die Neper'schen Logarithmen multipliciren muß, um daraus Logarithmen eines Systems für die Basis a zu erhalten. Man nennt diese Zahl den Modulus des letzteren Systems. Für das System der Neper'schen Logarithmen ist demnach der Modulus gleich der Einheit. Die Zahl la dagegen, oder das Umgekehrte des Modulus, gibt denjenigen Factor an, mit welchem die Logarithmen eines Systems für die Basis a multiplicirt werden müssen, um sie in Neper'sche Logarithmen zu verwandeln.

§. 105. In dem System der gewöhnlichen oder Briggischen Logarithmen ist die Basis $a = 10$. Nimmt man nun $r = 2^{60}$, so erhält man durch 60malige Ausziehung der Quadratwurzel aus 10

$$\sqrt[2^{60}]{10} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527$$

$$\frac{1}{2^{60}} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40454.$$

Folglich

$$\frac{1}{la} = \log e = \frac{86\ 73617\ 37988\ 40354}{199\ 71742\ 08125\ 50527} = 0{,}43429\ 44819$$

und

$$la = \frac{1}{\log e} = 2{,}30258\ 50930.$$

Mit der ersteren dieser beiden Zahlen, dem Modulus des Briggischen Systems, müssen die Neper'schen Logarithmen multiplicirt werden, um sie in Briggische zu verwandeln; mit der letzteren dagegen sind die Briggischen Logarithmen zu multipliciren, um in Neper'sche überzugehen.

Den Briggischen Logarithmus von jeder anderen Zahl, z. B. von 3, erhält man jetzt durch 60malige Ausziehung ihrer Quadratwurzel nämlich

$\sqrt[2^{60}]{3} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932$;
woraus

$$\log 3 = \frac{\sqrt[2^{60}]{3} - 1}{\sqrt[2^{60}]{10} - 1} = \frac{95\ 28942\ 64074\ 58932}{199\ 71742\ 08125\ 50527}$$
$$= 0{,}47712\ 12547\ 19662.$$

Man kann bemerken, daß sich vermöge der Entwickelung des §. 100, indem man das Quadrat und die höheren Potenzen von x vernachlässigt, setzen läßt $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$; man zieht daraus zur Erleichterung der vorstehenden Rechnungen den Schluß, daß bei der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl, welche vor dem Komma die Einheit, und hinter dem Komma nicht mehr als doppelt so viele Stellen enthält, als dem Komma unmittelbar Nullen nachfolgen, der Decimalbruch der Wurzel genau die Hälfte ist von dem Decimalbruch der gegebenen Zahl. Da überdies unter gleichen Voraussetzungen die Entwickelung des §. 102 gibt $\log(1+x) = x \log e$, so erkennt man ferner, daß die in Rede stehenden Decimalbrüche proportional sind den zugehörigen Logarithmen, und mithin diese unmittelbar selbst geben.

3. Exponentialfunction a^x.

§. 106. Nach den §§. 22 und 58 hat man $\frac{d^\mu . a^x}{dx^\mu} = (la)^\mu a^x$, folglich wird vermöge der Taylor'schen Reihe

$$a^{x+h} = a^x . \left(1 + la . h + \frac{(la)^2}{2} h^2 + \frac{(la)^3}{2 . 3} h^3 + \ldots + \frac{(la)^\mu a^{\theta h}}{2.3.4\ldots\mu} h^\mu\right).$$

Die beiden Gränzen, zwischen denen dasjenige Glied enthalten ist, welches den Rest der in den Klammern stehenden Reihe ausdrückt, sind

$$\frac{(la)^\mu}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu \text{ und } \frac{(la)^\mu a^h}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu.$$

Die Reihe ist convergent, welche Werthe man für x und h annehmen mag. Denn wenn man die Entwickelung um ein Glied weiter führt, so sind die Ausdrücke für die beiden Gränzen des Rests gleich den vorhergehenden multiplicirt mit $\frac{la.h}{\mu+1}$. Daraus ergibt sich aber unmittelbar, daß der Rest immer näher dem Werthe Null kommt, wenn man μ ohne Aufhören zunehmen läßt.

§. 107. Dividirt man durch a^x, und schreibt sodann x an die Stelle von h, so wird die vorige Entwickelung zu

$$a^x = 1 + la.x + \frac{(la)^2}{2}x^2 + \frac{(la)^3}{2.3}x^3 + \ldots. + \frac{(la)^\mu a^{\theta x}}{2.3.4\ldots\mu}x^\mu.$$

Setzt man $x = 1$, so hat man

$$a = 1 + la + \frac{(la)^2}{2} + \frac{(la)^3}{2.3} + \frac{(la)^4}{2.3.4} + \text{rc.}$$

Diese Reihe gibt die Basis a als Function von la, dem Umgekehrten des Modulus, so wie die Reihe des §. 104 den Werth von la als Function von der Basis a darstellt.

Für $a = e$ verwandelt die Reihe sich in

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{rc.},$$

welche Reihe gleichfalls beständig convergirt. Setzt man hierin $x = 1$, so findet man, wie es sein muß, den Ausdruck für die Zahl e, welcher im §. 16 gegeben worden ist.

4. Trigonometrische Functionen sin x und cos x.

§. 108. Man hat nach §. 59

$$\frac{d^\mu.\sin x}{dx^\mu} = \sin\left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right), \text{ und } \frac{d^\mu.\cos x}{dx^\mu} = \cos\left(x + \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Folglich wird nach der Taylor'schen Reihe

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x.h - \frac{\sin x}{2}h^2 - \frac{\cos x}{2.3}h^3 +$$

$$+\frac{\sin x}{2.3.4}h^4+\ldots\ldots+\frac{\sin\left(x+\theta h+\frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu,$$

$$\cos(x+h)=\cos x-\sin x.h-\frac{\cos x}{2}h^2+\frac{\sin x}{2.3}h^3+$$

$$+\frac{\cos x}{2.3.4}h^4-\ldots\ldots+\frac{\cos\left(x+\theta h+\frac{\mu\pi}{2}\right)}{2.3.4\ldots\mu}h^\mu.$$

Da der Werth des Sinus oder Cosinus eines beliebigen Bogens stets zwischen -1 und $+1$ enthalten ist, so liegen die Glieder, welche die Reste dieser beiden Reihen darstellen, stets zwischen den Gränzen $-\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}$ und $+\frac{h^\mu}{2.3.4\ldots\mu}$.

Die Reihen sind beständig convergent, welche Werthe auch x und h annehmen mögen. Denn führt man die Entwickelung ein Glied weiter, so sind die Gränzen, zwischen denen der Rest enthalten ist, gleich den vorhergehenden multiplicirt mit dem Bruche $\frac{h}{\mu+1}$, welcher Bruch ohne Aufhören abnimmt, während μ unbegränzt zunimmt.

§. 109. Man kann $x=0$ setzen, und sodann x an die Stelle von h schreiben, wodurch man erhält

$$\sin x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\text{rc.}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\text{rc.}$$

Für jede dieser Reihen, welche stets convergiren, hat man immer zwei Gränzen, zwischen denen ihr Werth enthalten ist, wenn man abwechselnd bei einem positiven und einem negativen Gliede abbricht. Beide Reihen hat Newton gegeben.

Man darf übrigens beim Gebrauche dieser Formeln nicht außer Acht lassen, daß unter dem Buchstaben x, welcher

einen Bogen bezeichnet, immer diejenige abstracte Zahl verstanden werden muß, durch welche die Länge dieses Bogens in einer Kreisperipherie, deren Halbmesser die Einheit ist, gemessen wird. So oft die Größe x unter den Zeichen sin, cos, tang ꝛc. vorkommt, kann man sie nach Gefallen durch Grade, Minuten und Secunden ausgedrückt ansehen; wo sie aber von diesen Zeichen frei ist, da muß man ihr die angegebene wahre Bedeutung unterlegen. Fährt man fort, sie durch Grade auszudrücken, deren 180 auf den Halbkreis gehen, so hat man die Anzahl der Grade mit dem Bruche $\frac{\pi}{180}$ zu multipliciren. Für Minuten verwandelt sich dieser Bruch in $\frac{\pi}{180.60}$; für Secunden in $\frac{\pi}{180.60.60}=\frac{1}{206\,264,8}$, wo die Zahl 206 264, 8 die Anzahl von Secunden bezeichnet, welche ein Bogen enthält, der an Länge dem Halbmesser gleich ist.

§. 110. Um noch die Function $y=\text{arc tang}\, x$ nach der Taylor'schen Reihe zu entwickeln, hat man aus §. 35

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}=\cos y^2.$$

Daraus folgt durch wiederholte Differentiation, indem man auf der rechten Seite immer y als Function von x ansieht,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\cos y\ \sin y.\frac{dy}{dx}=-2\cos y.\sin y.\cos y^2$$
$$=-\sin 2y.\cos y^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-2\,(\cos 2y.\cos y^2-\sin 2y.\cos y.\sin y)\,\frac{dy}{dx}$$
$$=-2\cos 3y.\cos y^3,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=2.3\,(\sin 3y.\cos y^3+\cos 3y.\cos y^2.\sin y)\,\frac{dy}{dx}$$
$$=2.3\sin 4y.\cos y^4,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2.3.4\,(\cos 4y \,.\, \cos y^4 - \sin 4y \,.\, \cos y^3 \,.\, \sin y)\frac{dy}{dx}$$
$$= 2.3.4 \cos 5y \,.\, \cos y^5,$$

und so fort. Man erhält also

$$\text{arc tang}\,(x+h) = y + \cos y \,.\, \cos y \,.\, h - \sin 2y \,.\, \cos y^2 \,.\, \frac{h^2}{2}$$
$$- \cos 3y \,.\, \cos y^3 \,.\, \frac{h^3}{3} + \sin 4y \,.\, \cos y^4 \,.\, \frac{h^4}{4}$$
$$+ \cos 5y \,.\, \cos y^5 \,.\, \frac{h^5}{5} - \text{ꝛc.}$$

Diese Gleichung liefert den Bogen, dessen Tangente $= x + h$ ist, ausgedrückt durch den Bogen, dessen Tangente $= x$ ist.

Setzt man $x = 0$ und damit zugleich $y = 0$, und schreibt x an die Stelle von h, so kommt

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe hat Leibniz gegeben. Setzt man in ihr $x = 1$, so erhält man die bemerkenswerthe Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.}\ ^{*)}$$

---

*) Zur wirklichen Berechnung der Zahl π convergirt diese Reihe nicht schnell genug. Besser gelangt man zu diesem Ziele durch die leicht nachzuweisende Relation

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{5} + \text{arc tang}\,\frac{1}{8},$$

durch deren Hülfe neuerlich Dase die Zahl π auf zweihundert Decimalstellen berechnet hat (m. s. Crelle's Journal für Mathematik, 27. Band)

XII. Beziehungen unter den Exponentialfunctionen und den trigonometrischen Functionen.

§. 111. Nach Maßgabe der Bezeichnungen, welche in der Arithmetik im Gebrauche sind, drückt man bekanntlich durch $\sqrt{-1}$ eine Größe aus, welche mit sich selbst multiplicirt -1 hervorbringt. Obgleich diese Größe im eigentlichen Sinne des Worts nicht existirt*) und daher der Ausdruck $\sqrt{-1}$ so wie alle von ihm abhängigen Functionen mit der Benennung imaginär belegt werden, so kann man dieselben dennoch allen analytischen Operationen unterwerfen, indem man $\sqrt{-1}$ wie eine Constante ansieht. Man weiß, daß die verschiedenen Potenzen von $\sqrt{-1}$ sind

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = +1$$
$$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6 = -1$$
ꝛc.

Ferner zieht man aus einer Gleichung wie

$$A + B\sqrt{-1} = P + Q\sqrt{-1},$$

wo A, B, P, Q reelle Größen bedeuten, stets den Schluß

$$A = P \text{ und } B = Q.$$

Folglich wenn man hat

$$A + B\sqrt{-1} = P, \text{ oder } A + B\sqrt{-1} = Q\sqrt{-1},$$

---

*) Daß und wie imaginäre Größen dennoch auf dem Gebiete der Geometrie als existirend nachgewiesen werden können, hat Gauß gezeigt. Die weiter unten vorkommenden geometrischen Versinnlichungen enthalten hierauf schon eine Hindeutung.

so schließt man daraus mit Nothwendigkeit

$A = P$ und $B = 0$, oder $A = 0$ und $B = Q$.

§. 112. Die imaginäre Größe

$$a + b\sqrt{-1}$$

kann immer auf die Form

$$\varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)$$

gebracht werden, wo ϱ und φ zwei reelle Größen bezeichnen, welche man aus den Gleichungen

$$\varrho\cos\varphi = a, \quad \varrho\sin\varphi = b$$

bestimmen kann, nämlich

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\varrho}.$$

Die Größe ϱ, welche man übereingekommen ist stets positiv zu nehmen, heißt der Modulus des imaginären Ausdrucks $a + b\sqrt{-1}$; dagegen φ bedeutet einen Winkel, dessen Cosinus und Sinus durch die angegebenen Ausdrücke festgestellt werden.

§. 113. Wenn man in die Entwickelung der Function e^x, §. 107, nämlich

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.}$$

statt x an die Stelle setzt $x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \\ + \frac{x^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Vergleicht man aber diese Reihe mit den Entwickelungen von $\cos x$ und $\sin x$, §. 109, so wird man finden, daß sie einerlei ist mit $\cos x + \sqrt{-1}\,.\,\sin x$. Man hat also

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

Wenn man das Vorzeichen von x ändert, so wird

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

Diese Gleichungen, welche in der Mathematik von großer Wichtigkeit sind, rühren von Euler her.

Man erhält aus ihnen unmittelbar

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

§. 114. Die vorhergehenden Formeln enthalten alle die Resultate in sich, welche man sonst gewohnt ist aus der unmittelbaren Betrachtung der Winkel herzuleiten. Denn wenn man die beiden Gleichungen

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x$$

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\,.\sin y$$

mit einander multiplicirt, so findet man

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$+ \sqrt{-1}\,.(\sin x \cos y + \cos x \sin y).$$

Aber von anderer Seite ist

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\,.\sin(x+y);$$

und aus der Gleichung beider Ausdrücke folgt, vermöge §. 111

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

welche beiden Gleichungen, wie bekannt, die Grundlage für alle trigonometrischen Relationen ausmachen.

§. 115. Vermittelst der gegebenen imaginären Ausdrücke für $\cos x$ und $\sin x$ kann man auch für alle übrigen trigonometrischen Functionen ähnliche Ausdrücke bilden. So hat man z. B.

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}$$

oder

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}$$

Man zieht aus dieser Gleichung

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}.$$

und folglich

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1 + \sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}{1 - \sqrt{-1}.\operatorname{tang} x}.$$

Entwickelt man diesen Logarithmus nach der Formel, welche sich am Schlusse des §. 102 findet, so hat man

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3} \operatorname{tang} x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tang} x^5 - \frac{1}{7} \operatorname{tang} x^7 + \text{rc.}$$

Dies ist wieder die im §. 110 gegebene Reihe von Leibniz.

§. 116. Die Entwickelungen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{rc.}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{rc.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \text{rc.}$$

gelten auch dann noch, wenn man dem Bogen x einen beliebigen imaginären Werth $x = m + n\sqrt{-1}$ beilegt. Denn man kann zeigen, daß die Substitution von $m + n\sqrt{-1}$ für x in der ersten Reihe, und die Multiplication der beiden Reihen, welche die Werthe von e^m und $e^{n\sqrt{-1}}$ darstellen, einerlei Resultat geben. Ebenso kann man bemerken, daß $\sin(m + n\sqrt{-1}) = \sin m \cos(n\sqrt{-1}) + \cos m \sin(n\sqrt{-1})$, und wenn man nun die Entwickelungen von $\sin m$ und $\cos(n\sqrt{-1})$ bildet und mit einander multiplicirt, und dazu das Product aus den Entwickelungen von $\cos m$ und $\sin(n\sqrt{-1})$ addirt, so wird man das nämliche Resultat erhalten, als wenn man unmittelbar in der Reihe, welche

den Werth von $\sin x$ darstellt, $x = m + n\sqrt{-1}$ setzt. In gleicher Weise hat man

$\cos(m+n\sqrt{-1}) = \cos m \cos(n\sqrt{-1}) - \sin m \sin(n\sqrt{-1})$,

und man erkennt, daß das Product der Entwickelungen von $\cos m$ und $\cos(n\sqrt{-1})$, vermindert um das Product der Entwickelungen von $\sin m$ und $\sin(n\sqrt{-1})$, dasselbe Resultat gibt wie die Substitution von $m + n\sqrt{-1}$ für x in der Reihe, welche den Werth von $\cos x$ darstellt.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die Gleichungen der §§. 113 und 114, welche die Beziehungen unter den Exponentialfunctionen und den trigonometrischen Functionen ausdrücken, auch noch in denjenigen Fällen Geltung haben, wo man der Veränderlichen x den imaginären Werth $m + n\sqrt{-1}$ beilegt.

Moivre'sche Binomialformel. Auflösung der binomischen Gleichungen.

§. 117. Man hat aus §. 113 die Gleichung

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \,.\, \sin x,$$

in welcher x eine beliebige Zahl bedeutet, und die Wurzelgröße $\sqrt{-1}$ nach Gefallen mit dem Zeichen $+$ oder dem Zeichen $-$ genommen werden kann. Schreibt man mx statt x, wo m eine beliebige, jedoch reelle Constante bezeichnet, so kommt

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1} \,.\, \sin mx.$$

Wenn man aber die vorige Gleichung zur Potenz m erhebt, so erhält man

$$e^{mx\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1} \,.\, \sin x)^m.$$

Daraus folgt durch Gleichsetzung

$(\cos x + \sqrt{-1} \,.\, \sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \,.\, \sin mx$,

welche wichtige Gleichung von Moivre herrührt und den Namen der Moivre'schen Binomialformel führt.

Der gegebene Beweis gilt für jeden Werth des Exponenten m. Man kann jedoch für den Fall, wo m eine positive ganze Zahl ist, den Beweis anschaulicher führen, wenn man die successiven Potenzen von $\cos x + \sqrt{-1}.\sin x$ wirklich entwickelt. So erhält man

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^2$$
$$= \cos x^2 + 2\sqrt{-1}.\cos x \sin x - \sin x^2$$
$$= \cos 2x + \sqrt{-1}.\sin 2x,$$
$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^3$$
$$= (\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)(\cos 2x + \sqrt{-1}.\sin 2x)$$
$$= \cos 3x + \sqrt{-1}.\sin 3x,$$

2c.

§. 118. Die Moivre'sche Binomialformel liefert unmittelbar den Ausdruck für die Wurzeln der Gleichungen

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^n + 1 = 0,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich

$$x = \varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi),$$

wo ϱ positiv vorausgesetzt wird und φ irgend einen Winkel bezeichnet, so wird

$$x^n = \varrho^n\,(\cos n\varphi + \sqrt{-1}.\sin n\varphi).$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich die Gleichung $x^n - 1 = 0$ in

$$\varrho^n\,(\cos n\varphi + \sqrt{-1}.\sin n\varphi) - 1 = 0,$$

und dieser letztern Gleichung kann nach §. 111 nur Genüge geschehen, wenn man einzeln hat

$$\varrho^n \cos n\varphi - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \sin n\varphi = 0,$$

folglich, wenn man mit k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi = \frac{2k\pi}{n}, \quad \varrho = 1.$$

Man erhält also

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2k\pi}{n},$$

welcher Ausdruck alle reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ in sich enthalten muß. Setzt man zuerst $k = 0$, so hat man $x = 1$, und dies ist diejenige reelle Wurzel, welche die Gleichung nothwendig liefern mußte. Setzt man ferner $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, 2c. bis $k = n - 1$, so findet man $n - 1$ andere verschiedene Wurzeln, welche sämmtlich der gegebenen Gleichung angehören. Setzt man $k = n$, so hat man wieder die reelle Wurzel $x = 1$. Für $k = n + 1$ findet man wieder dieselbe Wurzel, welche vorhin aus der Annahme $k = 1$ hervorging; und so fort. Also liefert der obige Ausdruck wirklich die n reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$, und nur diese; und zwar entsprechen dieselben den n ersten Werthen für k von 0 bis $n - 1$. In dem besonderen Falle, wo n eine gerade Zahl ist, gibt der allgemeine Ausdruck für $k = \frac{n}{2}$, $x = -1$, d. h. die zweite reelle Wurzel, welche die gegebene Gleichung alsdann enthalten muß.

Die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ oder $x^n = 1$, welche auch **Wurzeln der Einheit** genannt werden, lassen sich demnach ausdrücken wie folgt

$$x = \cos\frac{0\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{0\pi}{n}$$

$$x = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$x = \cos\frac{4\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{4\pi}{n}$$

$$x = \cos\frac{6\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{6\pi}{n}$$

. . . .

$$x = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

§. 119. Substituirt man den Ausdruck

$$x = \varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin\varphi)$$

in die Gleichung $x^n + 1 = 0$, so erhält man ebenso

$$\varrho^n\,(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi) + 1 = 0,$$

und dieser Gleichung kann nur Genüge geleistet werden, wenn man einzeln hat

$$\varrho^n \cos n\varphi + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \sin n\varphi = 0,$$

folglich, wenn wieder k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n},\ \varrho = 1.$$

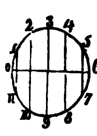
Demnach wird der Ausdruck

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

alle Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$ in sich enthalten müssen. Man findet diese Wurzeln, wenn man wie in dem vorhergehenden Falle nach und nach $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, 2c. bis $k = n - 1$ setzt. Denn diese n Werthe sind sämmtlich von einander verschieden; wollte man aber $k = n$, $k = n + 1$, 2c. setzen, so würden nur dieselben Werthe in derselben Ordnung wiederkehren. Wenn n eine gerade Zahl ist, so sind alle Wurzeln imaginär; wenn aber n ungerade ist, so liefert der obige Ausdruck für $k = \frac{n-1}{2}$, $x = -1$, d. h. die einzige reelle Wurzel, welche die Gleichung alsdann besitzt.

§. 120. Diese Resultate werden augenfälliger, wenn man sich eine Kreisperipherie, Fig. 25., von dem Endpunkte 0

Fig. 25.



eines Durchmessers aus in $2n$ gleiche Theile eingetheilt denkt. Alsdann werden die Theilpunkte 0, 2, 4, 6, 8, ꝛc. von gerader Ordnung diejenigen Bögen bestimmen, deren Cosinus und Sinus in dem Ausdrucke für die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ enthalten sind; dagegen werden die Theilpunkte 1, 3, 5, 7, 9, ꝛc. von ungerader Ordnung diejenigen Bögen feststellen, deren Cosinus und Sinus in den Ausdruck für die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$ eingehen.

§. 121. Man kann bemerken, daß die verschiedenen Winkel, welche durch die beiden Ausdrücke $\frac{2k\pi}{n}$ und $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ dargestellt werden, von solcher Beschaffenheit sind, daß einerlei Cosinus und entgegengesetzte Sinus stets zweien unter diesen Winkeln angehören. Man darf dieses schon aus der Doppelsinnigkeit des Vorzeichens von $\sqrt{-1}$ schließen, da jede Wurzel der Gleichung $x^n - 1 = 0$ eben sowol durch

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{n}$$

als auch durch

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{n}$$

ausgedrückt werden kann. Bildet man nun das Product aus den beiden zusammengehörigen Factoren des ersten Grades

$$\left(x - \cos\frac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(x - \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

so erhält man das reelle Resultat

$$x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1,$$

und hierin finden sich auf eine allgemeine Weise die Factoren des zweiten Grades dargestellt, welche in dem Ausdrucke $x^n - 1$ enthalten sind. Nimmt man nämlich in jenem Ausdrucke der Reihe nach für k alle ganzen Zahlen an, welche $\frac{n}{2}$ nicht übersteigen, und setzt jeden der dadurch erhaltenen Ausdrücke $= 0$, so erhält man eben so viele Gleichungen vom zweiten Grade, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung liefern müssen. Es ist dabei jedoch zu bemerken, daß für $k = 0$, wo der in Rede stehende Ausdruck wird $x^2 - 2x + 1$ oder $(x - 1)(x - 1)$, dennoch der Factor $x - 1$ nur einmal gezählt werden darf, wenn man die gegebene Gleichung aus der Multiplication der Factoren, welche ihren Wurzeln entsprechen, wieder zusammensetzen will. Ebenso für $k = \frac{n}{2}$, wenn n eine gerade Zahl ist, wo der vorige Ausdruck wird $x^2 + 2x + 1$ oder $(x + 1)(x + 1)$, darf gleichfalls der Factor $x + 1$ nur einmal gerechnet werden.

Auf gleiche Weise kann man zeigen, daß die imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$, paarweise mit einander verbunden, reelle Factoren des zweiten Grades hervorbringen, deren allgemeiner Ausdruck ist

$$x^2 - 2x \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + 1,$$

und zu ähnlichen Bemerkungen, wie vorhin, Anlaß gibt.

§. 122. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich leicht auf Gleichungen übertragen wie

$$x^n - a = 0 \quad \text{und} \quad x^n + a = 0,$$

wo a eine beliebige absolute Zahl bezeichnet; denn setzt man $\frac{x}{\sqrt[n]{a}} = y$, so kommt man wieder zurück auf $y^n - 1 = 0$ und $y^n + 1 = 0$. Man erkennt hieraus, daß die $n$te Wurzel aus einer jeden Zahl a allgemein n Werthe besitzt, welche

den Producten aus dem numerischen Werthe von $\sqrt[n]{a}$ mit den n Wurzeln der Einheit gleich sind; d. h. man muß, sobald man sich auch auf das Gebiet der imaginären Wurzeln einläßt, unter der $n$ten Wurzel aus $+a$ den Ausdruck verstehen

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Ebenso wird die $n$te Wurzel aus $-a$ dargestellt durch den Ausdruck

$$\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\sqrt{-1}\,.\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Beide Ausdrücke liefern die gesuchten n Werthe der Wurzel, wenn man für k nach und nach die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... $n-1$ setzt. Will man sich auf die reellen Werthe von $\sqrt[n]{+a}$ beschränken, so erhält man deren nur einen, nämlich $+\sqrt[n]{a}$, wenn n ungerade ist; dagegen zwei, nämlich $\pm\sqrt[n]{a}$, wenn n gerade ist. Verfährt man ebenso mit $\sqrt[n]{-a}$, so erhält man den einzigen reellen Werth $-\sqrt[n]{a}$, wenn n ungerade ist; dagegen existirt kein reeller Werth, wenn n gerade ist.

§. 123. Die so eben nachgewiesene Nothwendigkeit, einen Ausdruck wie $\sqrt[n]{a}$, wo a eine positive oder negative Zahl bedeutet, in völliger Allgemeinheit stets wie die Darstellung von n von einander verschiedenen reellen oder imaginären Werthen zu betrachten, gibt sogleich noch Anlaß zu ein paar Bemerkungen, welcher zur allgemeinen Deutung der Moivre'schen Binomialformel

$$(\cos x+\sqrt{-1}\,.\sin x)^m=\cos mx+\sqrt{-1}\,.\sin mx$$

nöthig sind. So lange nämlich der Exponent m eine ganze Zahl ist, hat jede Seite der Gleichung nur einen einzigen

Werth, und diese beiden Werthe sind identisch, wovon man sich durch Bildung der *m*ten Potenz von $\cos x + \sqrt{-1}.\sin x$ auf dem Wege der Multiplication überzeugen kann. Aber wenn der Exponent ein Bruch ist von der Form $\frac{1}{q}$, oder allgemeiner von der Form $\frac{p}{q}$ (wo p und q als relative Primzahlen vorausgesetzt werden), so muß die linke Seite, vermöge des Vorhergehenden, q verschiedene Werthe darstellen. Diese Werthe werden nun auch zum Vorschein kommen, wenn man auf der rechten Seite den Factor $\cos\frac{2k\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2k\pi}{q}$ einführt, welcher die q Wurzeln der Einheit liefert, und darin für k eine Reihefolge von q ganzen Zahlen setzt. Man wird also schreiben

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^{\frac{p}{q}} =$$
$$\left(\cos\frac{p}{q}x + \sqrt{-1}.\sin\frac{p}{q}x\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2k\pi}{q}\right),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{px+2k\pi}{q} + \sqrt{-1}.\sin\frac{px+2k\pi}{q},$$

oder weil man, da p eine ganze Zahl ist, statt k auch pk schreiben kann,

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}(x + 2k\pi)$$
$$+ \sqrt{-1}.\sin\frac{p}{q}(x + 2k\pi).$$

Also um die q Werthe zu erhalten, welche die rechte Seite der Gleichung

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}x + \sqrt{-1}.\sin\frac{p}{q}x$$

liefern muß, hat man nur nöthig, den Winkel x nach und nach um die Vielfachen 0, 1, 2, 3, ... $q-1$ der Kreisperipherie 2π zunehmen zu lassen.

§. 124. Die vorstehenden Resultate geben auch die Auflösung der Gleichungen von der Form

$$x^{2n} + ax^n + b = 0.$$

Denn nimmt man zuerst den Werth von x^n, so hat man

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

und wenn hierin die Wurzelgröße reell ist, so bleibt nur noch die Gleichung aufzulösen

$$x^n + \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = 0,$$

ähnlich derjenigen des §. 122.

Wenn aber die genannte Wurzelgröße imaginär ist, also b positiv und zugleich $a^2 < 4b$, so kann man in der gegebenen Gleichung $\sqrt{\frac{a^2}{4b}} = \cos g$ und $\frac{x}{\sqrt[2n]{b}} = y$ setzen, und dieselbe mithin in die eine oder die andere der beiden folgenden Gleichungen umwandeln

$$y^{2n} - 2\cos g \,.\, y^n + 1 = 0$$
$$y^{2n} + 2\cos g \,.\, y^n + 1 = 0,$$

je nachdem ihr zweites Glied negativ oder positiv war. Betrachtet man zunächst den ersten Fall und substituirt in die Gleichung

$$y^{2n} - 2\cos g \,.\, y^n + 1 = 0$$

den Ausdruck

$$y = \varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin\varphi),$$

wo ϱ als positiv vorausgesetzt wird, so kommt

$$\varrho^{2n}(\cos 2n\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin 2n\varphi) - 2\varrho^n\cos g\,.(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin n\varphi) + 1 = 0,$$

welche Gleichung in die beiden zerfällt

$$\varrho^{2n} \cos 2n\,\varphi - 2\,\varrho^n \cos g . \cos n\,\varphi + 1 = 0$$
$$\varrho^{2n} \sin 2n\,\varphi - 2\,\varrho^n \cos g . \sin n\,\varphi = 0.$$

Wegen $\sin 2n\varphi = 2 \sin n\varphi \cos n\,\varphi$ gibt die letzte Gleichung

$$\varrho^n = \frac{\cos g}{\cos n\,\varphi};$$

die erste Gleichung aber kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{1}{\varrho^n} = 2 \cos g\ .\ \cos n\,\varphi - \varrho^n \cos 2n\varphi,$$

oder wenn man hierin auf der rechten Seite für ϱ_n seinen vorigen Werth setzt und die Beziehung $\cos 2n\varphi = (\cos n\varphi)^2 - (\sin n\varphi)^2$ berücksichtigt

$$\frac{1}{\varrho^n} = \frac{\cos g}{\cos n\,\varphi}.$$

Folglich hat man

$$\varrho^n = \frac{1}{\varrho^n},\ \text{woraus}\ \varrho = 1,$$

und sodann

$$\cos n\varphi = \cos g,\ \text{woraus}\ \varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n},$$

wo k wie früher eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die gesuchten Wurzeln werden also durch den Ausdruck

$$y = \cos \frac{2k\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\ .\sin \frac{2k\pi \pm g}{n}$$

dargestellt, worin man für k alle ganzen Zahlen von 0 bis $n-1$ zu setzen hat. Die reellen Factoren des zweiten Grades, welche der gegebenen Gleichung angehören, werden dargestellt durch

$$y^2 - 2y \cos \frac{2k\pi \pm g}{n} + 1.$$

Behandelt man ebenso den zweiten Fall indem man in die Gleichung

$$y^{2n} + 2 \cos g . y^n + 1 = 0$$

den Ausdruck substituirt

$$y = \varrho\,(\cos \varphi + \sqrt{-1} . \sin \varphi),$$

so erhält man gleichfalls $\varrho = 1$, und sodann

$$\cos n\varphi = -\cos g, \text{ woraus } \varphi = \frac{(2k+1)\pi \pm g}{n}.$$

Die Wurzeln werden also ausgedrückt durch

$$y = \cos\frac{(2k+1)\pi \pm g}{n} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{(2k+1)\pi \pm g}{n}.$$

und die reellen Factoren des zweiten Grades durch

$$y^2 - 2y\cos\frac{(2k+1)\pi \pm g}{n} + 1.$$

§. 125. Die Zerlegung der zweigliederigen Gleichungen in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades entspricht einem bemerkenswerthen geometrischen Satze, welcher nach seinem Erfinder der Lehrsatz von Cotes genannt wird. In einem Kreise, dessen Halbmesser der Einheit gleich ist, Fig. 26. und 27., sei auf einem Durchmesser aus dem Mittelpunkte A die Strecke $AB = x$ abgetragen.*) Der

Fig. 26.

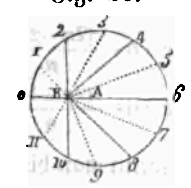
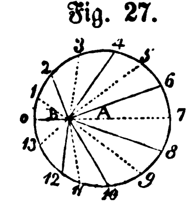


Fig. 27.



Bogen 01, von diesem Durchmesser aus gerechnet, werde mit φ bezeichnet, und die Länge $B1$ mit y. Alsdann ist offenbar

$$y = \sqrt{(\cos\varphi - x)^2 + \sin\varphi^2}$$

und

$$y^2 = x^2 - 2x\cos\varphi + 1.$$

*) In den Figuren ist AB kleiner als der Halbmesser angenommen; jedoch ist dies nicht nothwendig, sondern der Punkt B kann auch außerhalb des Kreises fallen.

Man denke sich nun, vom Punkte 0 aus, die Kreisperipherie 2π in $2n$ gleiche Theile eingetheilt, und die Längen $B0$, $B1$, $B2$, $B3$, ꝛc. resp. bezeichnet mit y_0, y_1, y_2, y_3, ... y_{2n-1}. Legt man alsdann dem Bogen φ, in dem vorigen Ausdrucke für y^2, nach und nach die Werthe $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{1\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$. . . . $\frac{(2n-1)\pi}{n}$ bei, so erhält man

$$y_0{}^2 = x^2 - 2x \cos \frac{0\pi}{n} + 1$$

$$y_1{}^2 = x^2 - 2x \cos \frac{1\pi}{n} + 1$$

$$y_2{}^2 = x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{n} + 1$$

$$y_3{}^2 = x^2 - 2x \cos \frac{3\pi}{n} + 1$$

. . . .

. . . .

$$y^2{}_{2n-2} = x^2 - 2x \cos \frac{(2n-2)\pi}{n} + 1$$

$$y^2{}_{2n-1} = x^2 - 2x \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} + 1.$$

Nun lehrt der Augenschein, daß, wenn man hier die y^2 von gerader Ordnung oder die y^2 von ungerader Ordnung heraushebt, man die Factoren des zweiten Grades von den Functionen $x^n - 1$ und $x^n + 1$ erhalten wird, deren allgemeine Ausdrücke im §. 121 gegeben sind. Ferner sieht man, daß die Theilpunkte, welche gleich weit von den Endpunkten des Durchmessers AB entfernt sind, identische Werthe von y geben, so daß man immer hat $y_{n-1} = y_{n+1}$, $y_{n-2} = y_{n+2}$, ꝛc. Endlich hat man zu beachten, daß in Folge dessen, was in dem angeführten §. gesagt worden ist, diejenigen einfachen Factoren nur einmal gezählt werden dürfen, welche in den Faktoren des zweiten Grades enthalten sind, die den

Endpunkten des Durchmessers entsprechen. Folglich hat man

$$x^n - 1 = y_0 . y_2 . y_4 . y_6 \ldots\ldots y_{2n-2}$$

$$x^n + 1 = y_1 . y_3 . y_5 . y_7 \ldots\ldots y_{2n-1},$$

in welchen beiden Gleichungen der Lehrsatz von Cotes enthalten ist.

Wenn die Construction in einem Kreise vorgenommen wäre, dessen Halbmesser $= \varrho$ ist, so würde man, ohne die Verhältnisse unter den Linien der Figur zu stören, auf den vorigen Fall zurückkommen, wenn man den Halbmesser ϱ auf die Einheit, und x auf $\frac{x}{\varrho}$ reduciren wollte. Demnach hat man gleichfalls

$$x^n - \varrho^n = y_0 . y_2 . y_4 . y_6 \ldots\ldots y_{2n-2}$$

$$x^n + \varrho^n = y_1 . y_3 . y_5 . y_7 \ldots\ldots y_{2n-1},$$

wo y_0, y_1, y_2, 2c. jetzt die Längen der Linien $B0$, $B1$, $B2$, 2c. in einem Kreise vom Halbmesser ϱ bedeuten.

§. 126. Eine ähnliche Construction läßt sich angeben, um die Gleichungen des §. 124

$$x^{2n} - 2\cos g . x^n + 1 = 0 \text{ und } x^{2n} + 2\cos g . x^n + 1 = 0$$

in ihre Factoren zu zerlegen. Vermöge der daselbst angegebenen Ausdrücke für die reellen Factoren des zweiten Grades, welche diesen Gleichungen angehören, erkennt man leicht, daß die Quadrate der Linien $B0$, $B1$, $B2$, 2c. diese Factoren darstellen, vorausgesetzt, daß man die Eintheilung der Kreisperipherie in $2n$ gleiche Theile nicht von dem Endpunkte C des Durchmessers beginne, auf welchem die Strecke $AB = x$ abgetragen worden ist, sondern wie in Fig. 28 von dem Punkte 0, nachdem man von C aus den Bogen $C0 = \frac{g}{n}$ abgetragen hat. Nennt man wieder y_0, y_1, y_2, y_3, 2c. die Längen $B0$, $B1$, $B2$, $B3$, 2c., so erhält man

Fig. 28.

$$x^{2n} - 2\cos g \,.\, x^n + 1 = y_0^2 \,.\, y_2^2 \,.\, y_4^2 \,.\, y_6^2 \ldots\ldots y^2_{2n-2}$$
$$x^{2n} + 2\cos g \,.\, x^n + 1 = y_1^2 \,.\, y_3^2 \,.\, y_5^2 \,.\, y_7^2 \ldots\ldots y^2_{2n-1}.$$

Dieser letzte Satz, den Moivre gegeben hat, enthält übrigens den vorigen als einen besonderen Fall in sich; denn man hat nur $g = 0$ zu setzen, um den Lehrsatz von **Cotes** wieder hervorgehen zu lassen.

Imaginäre Functionen. Allgemeine Ausdrücke der Logarithmen und der Sinus und Cosinus.

§. 127. Die Eigenschaften der imaginären Ausdrücke gründen sich allein auf die in den §§. 111 und 112 dargelegten Begriffe, so wie auf die Identität der Ausdrücke $e^{x\sqrt{-1}}$ und $\cos x + \sqrt{-1} \,.\, \sin x$, §. 113, welche unmittelbar zu der Binomialformel von Moivre, §. 117, führt. Von den weiteren Folgerungen sollen hier nur noch die einfachsten zur Sprache gebracht werden.

Die Grundeigenschaften der einfachen Functionen x^m, $\log x$, a^x, $\sin x$ und $\cos x$, bleiben noch bestehen, wenn man der Veränderlichen x einen imaginären Werth beilegt.

Die Natur der Function x^m besteht darin, daß man immer hat $x^m \, x^n = x^{m+n}$. Setzt man nun

$$x = s\,(\cos t + \sqrt{-1} \,.\, \sin t),$$

so wird

$$x^m = s^m (\cos t + \sqrt{-1} \,.\, \sin t)^m = s^m (\cos mt + \sqrt{-1} \,.\, \sin mt)$$
$$x^n = s^n (\cos t + \sqrt{-1} \,.\, \sin t)^n = s^n (\cos nt + \sqrt{-1} \,.\, \sin nt),$$

und mithin

$$x^m \, x^n = s^{m+n} (\cos (m+n)\, t + \sqrt{-1} \,.\, \sin (m+n)\, t) = x^{m+n}.$$

§. 128. In gleicher Weise muß die Function a^x stets geben $a^x \, a^y = a^{x+y}$. Ueberdies kann man immer statt a^x die Function e^x betrachten; denn setzt man $a^x = e^v$ und nimmt auf beiden Seiten dieser Gleichung die Neper'schen Logarithmen, so kommt $x \, la = v$, und man hat also nur

nöthig x mit la zu multipliciren, wenn man a^x in e^x umwandeln will. Setzt man aber $x = m + n\sqrt{-1}$, und $y = p + q\sqrt{-1}$, so wird

$$e^x = e^{m+n\sqrt{-1}} = e^m \cdot e^{n\sqrt{-1}} = e^m(\cos n + \sqrt{-1}\,.\sin n)$$
$$e^y = e^{p+q\sqrt{-1}} = e^p \cdot e^{q\sqrt{-1}} = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\,.\sin q),$$

folglich

$$e^x e^y = e^{m+p}(\cos(n+q) + \sqrt{-1}\,.\sin(n+q)) = e^{x+y}.$$

Man muß beachten, daß in der Umwandlung von a^x in e^x, indem man x mit la multiplicirt, die Voraussetzung enthalten liegt, daß der Logarithmus la angegeben werden könne, d. h. daß a eine reelle und positive Zahl sei. Die in Rede stehende Eigenschaft der Function a^x besteht nicht mehr ohne Einschränkung, wenn man der Zahl a auch negative oder imaginäre Werthe beilegen will.

§. 129. Die Natur der Logarithmen besteht in der Beziehung $\log xy = \log x + \log y$. Diese Gleichung findet in gleicher Weise statt, man mag den Veränderlichen x und y beliebige reelle und imaginäre Werthe beilegen, wenn nur immer die Basis a des logarithmischen Systems eine reelle und positive Zahl ist, gemäß dem, was im §. 64 gesagt wurde. Um dieses nachzuweisen, kann man lx statt $\log x$ betrachten, da es nach §. 104 hinreicht, die Function $\log x$ mit la zu multipliciren, um sie in lx zu verwandeln. Setzt man nun $x = s(\cos t + \sqrt{-1}\,.\sin t)$, $y = u(\cos v + \sqrt{-1}\,.\sin v)$, und beachtet man, daß nach §. 113., $e^{t\sqrt{-1}} = \cos t + \sqrt{-1}\,.\sin t$, woraus $t\sqrt{-1} = l(\cos t + \sqrt{-1}\,.\sin t)$, und daß ebenso $v\sqrt{-1} = l(\cos v + \sqrt{-1}\,.\sin v)$, so hat man

$$lx = ls + t\sqrt{-1}$$
$$ly = lu + v\sqrt{-1},$$

woraus

$$lx+ly=l.su+(t+v)\sqrt{-1}=l.xy.$$

§. 130. Multiplicirt man die beiden Seiten der Gleichung $e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}.\sin x$ mit einer beliebigen reellen und positiven Zahl h, und geht sodann zu den Neper'schen Logarithmen über, so erhält man

$$lh+x\sqrt{-1}=l[h(\cos x+\sqrt{-1}.\sin x)].$$

Aber nach §. 112 kann jede imaginäre Zahl, wie $m+n\sqrt{-1}$, auf die Form $h(\cos x+\sqrt{-1}.\sin x)$ gebracht werden; folglich liefert die vorstehende Gleichung den allgemeinen Ausdruck für den Neper'schen Logarithmus einer imaginären Zahl. Dieser Logarithmus ist gleich dem Neper'schen Logarithmus des Modulus h, zu welchem das Glied $x\sqrt{-1}$ addirt ist.

Der Ausdruck $h(\cos x+\sqrt{-1}.\sin x)$ reducirt sich auf eine reelle positive Zahl, wenn man den Bogen $x=2k\pi$ setzt, wo k eine ganze Zahl bedeutet; dagegen auf eine reelle negative Zahl, wenn man $x=(2k+1)\pi$ setzt. Man hat also resp.

$$lh+2k\pi\sqrt{-1}$$
$$lh+(2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

als allgemeine Ausdrücke der Neper'schen Logarithmen der positiven Zahl h und der negativen Zahl $-h$. Diese Ausdrücke müssen zugelassen werden, weil sie den Gleichungen $e^{lx}=x$ und $lx+ly=l.xy$ Genüge leisten, welche unmittelbar aus der Definition der logarithmischen Function hervorgehen. Man erkennt aus denselben, daß der Logarithmus einer jeden positiven Zahl nur einen einzigen reellen Werth hat, welcher dem Werthe $k=0$ angehört; der Logarithmus einer negativen Zahl aber hat nur imaginäre Werthe.

§. 131. Der vorstehende Ausdruck für den Logarithmus einer Zahl kann übrigens auch aus der Gleichung des §. 103

$$lz = r\left[z^{\frac{1}{r}} - 1 - \frac{1}{2}(z^{\frac{1}{r}} - 1)^2 + \frac{1}{3}(z^{\frac{1}{r}} - 1)^3 - \text{ꝛc.}\right]$$

hergeleitet werden. Vermöge dieser Gleichung kann nämlich, wenn man r unendlich groß werden läßt, der Logarithmus von z auch dargestellt werden durch die Gränze

$$\lim . r\,(z^{\frac{1}{r}} - 1).$$

Will man in diesen Ausdruck aber alle Allgemeinheit hineinlegen, deren er fähig ist, so hat man nach §. 122, $z^{\frac{1}{r}}$ anzusehen als das Product aus dem numerischen Werthe $\sqrt[r]{z}$ mit den r Wurzeln der Einheit. Man wird also statt der vorigen Gränze schreiben

$$\lim . r\left[\sqrt[r]{z}\left(\cos\frac{2k\pi}{r} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2k\pi}{r}\right) - 1\right]$$

oder

$$\lim . r\left(\sqrt[r]{z}\,.\cos\frac{2k\pi}{r} - 1\right) + \sqrt{-1}\,.\lim . \sqrt[r]{z}\,.\,r\sin\frac{2k\pi}{r}.$$

Hier wird, wenn man r unendlich groß werden läßt, im ersten Gliede $\lim . \cos\frac{2k\pi}{r} = 1$, und im zweiten Gliede $\lim \sqrt[r]{z} = 1$ und $\lim . r\sin\frac{2k\pi}{r} = 2k\pi$. Folglich reducirt sich der Ausdruck für den Logarithmus von z auf

$$\lim . r\,(\sqrt[r]{z} - 1) + 2k\pi\sqrt{-1}, \text{ d. h. } lz + 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Sucht man den Logarithmus einer negativen Zahl $-z$, so wird man auf ähnliche Weise die $r$ten Wurzeln aus $-z$, nach §. 122, darzustellen haben durch $\sqrt[r]{z}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{r} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{(2k+1)\pi}{r}\right)$, und sodann liefert dieselbe Entwickelung als allgemeinen Ausdruck für den Logarithmus von $-z$

$$lz + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

§. 132. Aus dem Vorstehenden leitet man leicht die beiden allgemeinen Ausdrücke ab

$$l(1) = 2k\pi\sqrt{-1},\ l(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Für $k = 0$ nimmt der erstere seinen einzigen reellen Werth, $l(1) = 0$, an; der zweite dagegen liefert $l(-1) = \pi\sqrt{-1}$, woraus $\pi = \frac{l(-1)}{\sqrt{-1}}$, welchen eigenthümlichen Ausdruck der Zahl π schon Johann Bernoulli gegeben hat. Allgemeiner hat man übrigens

$$\pi = \frac{l(1)}{2k\sqrt{-1}} \text{ und } \pi = \frac{l(-1)}{(2k+1)\sqrt{-1}}.$$

Gleichungen dieser Art sind unmittelbare Folgerungen aus der Beziehung, welche unter den Entwickelungen der Functionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ stattfindet, und lassen sich nach dieser Bemerkung ohne Schwierigkeit deuten.

§. 133. Man erkennt in gleicher Weise, daß die wesentlichen Eigenschaften der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$, welche durch die Gleichungen

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

ausgesprochen werden, auch in den Fällen Gültigkeit behalten, wo man die Veränderlichen x und y imaginär annimmt und resp. durch die Ausdrücke $m+n\sqrt{-1}$ und $p+q\sqrt{-1}$ ersetzt. Es genügt in dieser Beziehung auf die §§. 114 und 116 zurück zu verweisen.

§. 134. Will man übrigens die allgemeinen Ausdrücke für den Sinus und den Cosinus eines beliebigen reellen oder imaginären Bogens wirklich entwickeln, so wird man bemerken, daß

$$\cos(m+n\sqrt{-1}) = \cos m \cos(n\sqrt{-1}) - \sin m \sin(n\sqrt{-1})$$
$$\sin(m+n\sqrt{-1}) = \sin m \cos(n\sqrt{-1}) + \cos m \sin(n\sqrt{-1}).$$

Aber die Exponentialausdrücke für $\cos x$ und $\sin x$ im §. 113,

welche nach §. 116 auch noch für den Fall gelten, wo man für x den imaginären Werth $n\sqrt{-1}$ setzt, geben

$$\cos(n\sqrt{-1}) = \frac{e^{-n}+e^{n}}{2}, \ \sin(n\sqrt{-1}=)\frac{e^{-n}-e^{n}}{2\sqrt{-1}}.$$

Also wird

$$\cos(m+n\sqrt{-1}) = \frac{e^{n}+e^{-n}}{2}\cos m - \sqrt{-1}\,.\,\frac{e^{n}-e^{-n}}{2}\sin m$$

$$\sin(m+n\sqrt{-1}) = \frac{e^{n}+e^{-n}}{2}\sin m + \sqrt{-1}\,.\,\frac{e^{n}-e^{-n}}{2}\cos m.$$

§. 135. Da eine weitere Ausführung der angeregten Entwickelungen hier nicht angemessen erscheint, so möge nur die Bemerkung noch Raum finden, daß alle analytischen Beziehungen, welche unter reellen und imaginären Größen aufgestellt werden können, nur dann als zulässig anzusehen sind, wenn sie aus den Fundamental-Gleichungen ihre Rechtfertigung und Deutung erhalten. Diese Fundamental-Gleichungen sind in dem Anfange dieses Abschnitts aufgestellt, und beruhen in der Identität der Entwickelungen der Ausdrücke $e^{x\sqrt{-1}}$ und $\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x$ in Reihen, welche beständig convergiren.

Ueberdies haben die vorigen Entwickelungen gezeigt, daß die Functionen der imaginären Größe $m + n\sqrt{-1}$ sich stets als Ausdrücke von der Form $P + Q\sqrt{-1}$ darstellten, wo P und Q reelle Größen bedeuten. Man kann daraus schließen, daß dasselbe bei Functionen eintreten wird, welche aus jenen zusammengesetzt sind. Ebenso verhält es sich mit den umgekehrten Functionen, wie arc sin x und arc cos x; und überhaupt kann man im allgemeinen den Satz einräumen, daß jede Function, welche aus imaginären Größen gebildet ist, wieder die imaginäre Form $P + Q\sqrt{-1}$, wo P und Q reell sind, annehmen wird.

Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens, ausgedrückt durch die Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen.

§. 136. Man hat mehrere Reihen gegeben, mit deren Hülfe die Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen durch Potenzen des Sinus und des Cosinus des einfachen Bogens, und umgekehrt, ausgedrückt werden können. Von diesen Reihen, deren Herleitung sich wieder auf die in den §§. 111 ꝛc. enthaltenen Grundbegriffe stützt, mögen hier noch die folgenden aufgenommen werden, deren Gebrauch in der Integralrechnung von Nutzen ist. Dieselben beschränken sich auf ganze und positive Potenzen des Sinus und Cosinus.

Man setze

$\cos x + \sqrt{-1}.\sin x = u$, woraus $2\cos x = u + v$

$\cos x - \sqrt{-1}.\sin x = v$, $\sqrt{-1}.2\sin x = u - v$.

Entwickelt man nun nach der Newton'schen Binomialformel die $m$te Potenz von $u+v$, wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet, so wird

$$(2\cos x)^m = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2 + \ldots\ldots + v^m,$$

oder indem man beachtet, daß $uv = 1$ ist,

$$(2\cos x)^m = u^m + mu^{m-2} + \frac{m(m-1)}{2}u^{m-4} + \ldots\ldots + v^m.$$

Da man ferner nach der Moivre'schen Binomialformel stets hat $u^m = \cos mx + \sqrt{-1}.\sin mx$, so kann man statt der letzten Gleichung auch schreiben

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x$$
$$+ ,\ldots + \cos mx$$
$$+ \sqrt{-1}.(\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x$$
$$+ \ldots . - \sin mx).$$

Von diesen beiden Reihen enthält die erste Glieder, welche

paarweise einander gleich sind, mit Ausnahme eines einzigen in dem Falle, wo m gerade ist. Die zweite dagegen besteht aus Gliedern, welche sich immer gegenseitig aufheben. Man hat also:

1) Wenn der Exponent m gerade ist

$$(2\cos x)^m=2\left[\cos mx+m\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos 2x\right]+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

2) Wenn der Exponent m ungerade ist

$$(2\cos x)^m=2\left[\cos mx+m\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots\frac{m+3}{2}}{2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos x\right].$$

§. 137. Eine ähnliche Entwickelung liefert den Ausdruck für die Potenzen des Sinus. Bildet man nämlich die $m$te Potenz von $u-v$ für den Fall, wo m eine positive ganze Zahl ist, so erhält man

$$(\sqrt{-1}.2\sin x)^m=u^m-mu^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-2}v^2-\ldots\ldots\pm v^m,$$

oder weil $uv=1$ ist,

$$(\sqrt{-1}.2\sin x)^m=u^m-mu^{m-2}+\frac{m(m-1)}{2}u^{m-4}-\ldots\ldots\pm v^m,$$

wo von $\pm$ das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Setzt man sodann für u^m den Ausdruck $\cos mx+\sqrt{-1}.\sin mx$, so kommt

$$(\sqrt{-1}.2\sin x)^m = \cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x$$
$$- \ldots \pm \cos mx$$
$$+\sqrt{-1}\left(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x\right.$$
$$\left. - \ldots \mp \sin mx\right).$$

1) Wenn der Exponent m gerade ist, so wird die zweite Reihe zu Null, und man hat

$$(-1)^{\frac{m}{2}}(2\sin x)^m = 2\left[\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x\right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+2\right)}{2.3\ldots\left(\frac{m}{2}-1\right)}\cos 2x\right] \mp \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{2.3.4\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

2) Wenn der Exponent m ungerade ist, so wird die erste Reihe zu Null und man hat

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}(2\sin x)^m = 2\left[\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x\right.$$
$$\left. \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{2.3\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos x\right].$$

XIII. Ausdehnung des Taylor'schen Lehrsatzes auf Functionen von mehreren Veränderlichen.

---

§. 138. Es sei die Function vorgelegt

$$z = f(x, y),$$

in welcher x und y zwei unabhängige Veränderliche bedeuten. Man nimmt an, diese Veränderlichen erlangen resp. die Werthe $x + h$ und $y + k$, und sucht die Entwickelung des Werthes, welchen die Function annehmen wird, d. i. die Entwickelung von $f(x + h, y + k)$ nach Potenzen von h und k. Zu dem Ende setze man $h = \alpha\xi$ und $k = \alpha\eta$, und betrachte die Größe $f(x + \alpha\xi, y + \alpha\eta)$ als Function von α, so daß man hat

$$F(\alpha) = f(x + \alpha\xi, y + \alpha\eta).$$

Sodann kann man vermittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes, §. 81, $F(\alpha)$ nach den Potenzen von α entwickeln. Man bildet nämlich nach und nach die Differentialverhältnisse der höheren Ordnungen von $F(\alpha)$; diese sind, wenn man zur Abkürzung f statt $f(x + \alpha\xi, y + \alpha\eta)$ schreibt,

$$F'(\alpha) = \frac{df}{dx}\xi + \frac{df}{dy}\eta.$$

$$F''(\alpha) = \frac{d^2f}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2f}{dy^2}\eta^2,$$

$$F'''(\alpha) = \frac{d^3f}{dx^3}\xi^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}\xi^2\eta + 3\frac{d^3f}{dxdy^2}\xi\eta^2 + \frac{d^3f}{dy^3}\eta^3,$$

ꝛc.

Setzt man hierin $\alpha = 0$, so erhält man

$$F'(0) = \frac{dz}{dx}\xi + \frac{dz}{dy}\eta$$

$$F''(0) = \frac{d^2z}{dx^2}\xi^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2z}{dy^2}\eta^2$$

$$F'''(0)=\frac{d^3z}{dx^3}\xi^3+3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta+3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi\eta^2+\frac{d^3z}{dy^3}\eta^3$$

ꝛc.

Man erhält also vermöge des angeführten Paragraphen

$$F(\alpha)=z+\begin{array}{l|l|l|l} \frac{dz}{dx}\xi & \alpha+\frac{d^2z}{dx^2}\xi^2 & \frac{\alpha^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}\xi^3 & \frac{\alpha^3}{2.3}+ꝛc. \\ +\frac{dz}{dy}\eta & +2\frac{d^2z}{dxdy}\xi\eta & +3\frac{d^3z}{dx^2dy}\xi^2\eta & \\ & +\frac{d^2z}{dy^2}\eta^2 & +3\frac{d^3z}{dxdy^2}\xi\eta^2 & \\ & & +\frac{d^3z}{dy^3}\eta^3 & \end{array}$$

oder wenn man h statt $\alpha\xi$ und k statt $\alpha\eta$ zurücksetzt

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k)=z+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\frac{d^4z}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}+ꝛc. \\ +\frac{dz}{dy}k+\frac{d^2z}{dxdy}hk+\frac{d^3z}{dx^2dy}\frac{h^2k}{2}+\frac{d^4z}{dx^3dy}\frac{h^3k}{2.3} \\ +\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3z}{dxdy^2}\frac{hk^2}{2}+\frac{d^4z}{dx^2dy^2}\frac{h^2k^2}{2.2} \\ +\frac{d^3z}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\frac{d^4z}{dxdy^3}\frac{hk^3}{2.3} \\ +\frac{d^4z}{dy^4}\frac{k^4}{2.3.4} \end{aligned}$$

Das Gesetz dieser Entwickelung ist sofort klar. Das zweite Glied ist das vollständige Differential der ersten Ordnung von der Function z, in welchem man h statt dx und k statt dy geschrieben hat. Das dritte Glied ist das vollständige Differential der zweiten Ordnung von z, mit den nämlichen Abänderungen, dividirt durch 2. Das vierte Glied ist das vollständige Differential der dritten Ordnung, mit denselben Abänderungen, dividirt durch 2.3; und so fort.

Man erkennt leicht, wie sich die vorstehende Entwickelung auch auf diejenigen Fälle übertragen läßt, wo die vorgelegte Function mehr als zwei unabhängige Veränderliche enthält, welche gleichzeitig Zunahmen erhalten sollen. Die

auf einander folgenden Glieder der Entwickelung sind immer die vollständigen Differentiale der ersten, zweiten, dritten, vierten ꝛc. Ordnung von der gegebenen Function, in denen man statt des Differentials einer jeden Veränderlichen diejenige Größe gesetzt hat, um welche dieselbe vermehrt worden ist, und die sodann resp. durch 1, 2, 2.3, 2.3.4, ꝛc. dividirt werden.

§. 139. Die vorstehende Erweiterung des Taylor'schen Lehrsatzes liefert auch die Entwickelung der Function $z=f(x,y)$ nach Potenzen von x und y, und damit also eine Erweiterung des Maclaurin'schen Lehrsatzes. Setzt man nämlich $x=0$ und $y=0$, und schreibt sodann x an die Stelle von h, und y an die Stelle von k, so erhält man

$$\begin{aligned} f(x,y) = z_0 &+ \frac{dz_0}{dx}x + \frac{d^2z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^3z_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3} + \text{ꝛc.} \\ &+ \frac{dz_0}{dy}y + \frac{d^2z_0}{dxdy}xy + \frac{d^3z_0}{dx^2dy}\frac{x^2y}{2} \\ &+ \frac{d^2z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2} + \frac{d^3z_0}{dxdy^2}\frac{xy^2}{2} \\ &+ \frac{d^3z_0}{dy^3}\frac{y^3}{2.3} \end{aligned}$$

wo mit z_0, $\frac{dz_0}{dx}$, $\frac{dz_0}{dy}$, $\frac{d^2z_0}{dx^2}$, ꝛc. die Werthe bezeichnet werden, welche resp. die Functionen z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ꝛc. annehmen, wenn in ihnen gleichzeitig $x=0$ und $y=0$ gesetzt wird.

Ebenso würde es sich verhalten, wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen beträchtlicher wäre.

§. 140. Will man die Reihe mit einem bestimmten Gliede abbrechen, und die beiden Gränzen kennen, zwischen denen der Werth des vernachlässigten Rests der Reihe enthalten ist, so wie es in den §§. 84 ꝛc. in Ansehung der Functionen von einer Veränderlichen geschah, so wird man wieder zu

der obigen Entwickelung von $F(\alpha)$ zurückkehren müssen. In dieser Entwickelung hat man nämlich, nach §. 86, in demjenigen Gliede, mit welchem man abbrechen will, $\theta\alpha$ für α zu schreiben, anstatt $\alpha=0$ zu setzen; und folglich hat man in der Entwickelung von $f(x+h,\ y+k)$ für x zu schreiben $x+\theta h$, und für y zu schreiben $y+\theta h$, wo θ wie früher eine unbestimmte, zwischen Null und der Einheit enthaltene Zahl bedeutet. Setzt man sodann in dem in Rede stehenden Gliede solche Werthe für θ, welche dieses Glied so groß wie möglich und so klein wie möglich machen, so hat man die beiden gesuchten Gränzen.

Wenn man z. B. in der Entwickelung einer Function von zwei Veränderlichen $z = f(x,\ y)$ mit den Gliedern der dritten Ordnung abbricht, so hat man

$$f(x+h,y+k)=z+\frac{dz}{dx}h+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}$$
$$+\frac{dz}{dy}k+\frac{d^2z}{dxdz}hk+\frac{d^3.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dx^2dy}\frac{h^2k}{2}$$
$$+\frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3.f(x+\theta h,y+\theta h)}{dx\,dy^2}\frac{hk^2}{2}$$
$$+\frac{d^3.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}.$$

§. 141. Ebenso verhält es sich, wenn die Function nach steigenden Potenzen der beiden Veränderlichen x und y geordnet ist. Bricht man hier gleichfalls mit den Gliedern der dritten Ordnung ab, so hat man

$$f(x,\ y)=z_0+\frac{dz_0}{dx}x+\frac{d^2z_0}{dx^2}\frac{x^2}{2}+\frac{d^3.f(x',y')}{dx'^3}\frac{x^3}{2.3}$$
$$+\frac{dz_0}{dy}y+\frac{d^2z_0}{dx\,dy}xy+\frac{d^3.f(x',y')}{dx'^2dy'}\frac{x^2y}{2}$$
$$+\frac{d^2z_0}{dy^2}\frac{y^2}{2}+\frac{d^3.f(x',y')}{dx'\,dy'^2}\frac{xy^2}{3}$$
$$+\frac{d^3.f(x',y')}{dy'^3}\frac{y^3}{2.3},$$

wo zu größerer Deutlichkeit x' und y' für θx und θy gesetzt worden sind; denn die Werthe sämmtlicher Differentialverhältnisse der dritten Ordnung müssen hier, ihrer Entstehung gemäß, so verstanden werden, daß man immer erst nach geschehener Differentiation θx für x und θy für y an die Stelle zu setzen hat. Nimmt man nun für θ solche Werthe an, welche den Ausdruck des Restes so groß wie möglich und so klein wie möglich machen, so erhält man zwei Gränzen, zwischen denen der wahre Werth der Entwickelung nothwendig enthalten sein muß.

XIV. Maxima und Minima der Functionen von einer und von mehreren Veränderlichen.

---

§. 142. Man betrachte zuerst eine reelle Function von einer Veränderlichen

$$y = f(x),$$

und vergegenwärtige sich den Inbegriff aller Werthe, welche diese Function annimmt, wenn man x alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt. Wenn die Werthe der Function y an irgend einer Stelle ihres Laufs vom Wachsen zum Abnehmen übergehen, so heißt der größte dieser Werthe ein Maximum; und umgekehrt wenn die Werthe der Function vom Abnehmen zum Wachsen übergehen, so heißt der kleinste derselben ein Minimum. Es ist hieraus klar, daß möglicher Weise eine Function weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen, aber auch, daß sie deren mehrere haben kann. Die Aufgabe ist immer, die-

jenigen Werthe der unabhängigen Veränderlichen x, falls es solche gibt, zu bestimmen, denen Maxima oder Minima der Function zugehören.

Wenn der Werth a von x einem Maximum der Function $f(x)$ entspricht, so ist klar, daß $f(a)$ größer sein muß als $f(a+h)$ und $f(a-h)$, wo h so klein gedacht werden kann, als man nur will. Ebenso wenn der Werth a einem Minimum der Function entspricht, so muß $f(a)$ kleiner sein als $f(a+h)$ und $f(a-h)$. Nach dieser Bemerkung kann die in Rede stehende Aufgabe leicht gelöst werden.

Entwickelt man $f(x+h)$ nach der Taylor'schen Reihe, so hat man allgemein

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{2c.}$$

und nach den Entwickelungen der §§. 84 2c. kann man diese Reihe mit einem beliebigen Gliede abbrechen, indem man für die weggelassenen Glieder einen Ausdruck an die Stelle setzt, dessen Werth zwischen zwei jederzeit leicht anzugebenden Gränzen enthalten ist. Man gehe zuerst bis zu dem Gliede der zweiten Ordnung, und setze nach §. 85

$$f(x+h)=f(x)+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2},$$

wo θ eine zwischen 0 und $+1$ enthaltene Zahl bedeutet. Es handelt sich nun um die Aufsuchung der nöthigen Bedingungen, damit $f(a)$ entweder größer oder kleiner werde, als $f(a\pm h)$, wo h beliebig klein sein darf. Aber wenn man h nur klein genug annimmt, so ist sogleich klar, daß man immer das Zeichen der Summe der beiden Glieder $\frac{d.f(x)}{dx}h$ $+\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ kann abhängig machen von dem Zeichen des ersten Gliedes $\frac{d.f(x)}{dx}h$ allein, weil $\frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ durch angemessene Wahl von h stets kleiner gemacht werden kann

als $\frac{d.f(x)}{dx}$. Man schließt hieraus: 1) daß $f(a)$ nicht anders größer werden kann als $f(a+h)$, welches Vorzeichen auch h annehmen mag, als wenn $\frac{d.f(a)}{dx} = 0$ und $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ mit dem Zeichen — behaftet ist; 2) daß $f(a)$ nicht anders kleiner als $f(a+h)$ werden kann, welches Vorzeichen auch h annehmen mag, als wenn $\frac{d.f(a)}{dx} = 0$ und $\frac{d^2.f(a)}{dx^2}$ mit dem Zeichen + behaftet ist.

Damit also für den Werth $x = a$ ein Maximum oder Minimum der Function stattfinde, ist es nöthig, daß dieser Werth a das Differentialverhältniß der ersten Ordnung zu Null werden lasse. Alsdann wird ein Maximum oder ein Minimum eintreten, je nachdem der nämliche Werth das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung negativ oder positiv macht.

§. 143. Es kann eintreten, daß der in Rede stehende Werth die Differentialverhältnisse der beiden ersten Ordnungen gleichzeitig zu Null macht. In diesem Falle ist es nöthig, auch die folgenden Glieder der Entwickelung zuzuziehen, und nach §. 85 zu schreiben

$$f(x+h) = f(x) + \frac{d.f(x)}{dx}h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \frac{d^4.f(x+\theta h)}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4}.$$

Eine ähnliche Betrachtung wie oben zeigt sodann, daß, wenn die Glieder $\frac{d.f(x)}{dx}h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}$ für $x = a$ verschwinden, diesem Werthe a nicht anders ein Maximum oder Minimum der Function zugehören kann, als wenn für ihn gleichfalls das Glied $\frac{d^3.f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}$ zu Null wird; und daß ein Maximum oder ein Minimum eintreten wird, je nachdem der nämliche

Werth das Differentialverhältniß der vierten Ordnung $\frac{d^4.f(x)}{dx^4}$ negativ oder positiv macht.

Allgemein kann für einen gegebenen Werth von x nur dann ein Maximum oder Minimum der Function eintreten, wenn in der Reihe der Differentialverhältnisse das erste, welches durch diesen Werth nicht zu Null wird, von gerader Ordnung ist. Es wird aber ein Maximum oder ein Minimum sein, je nachdem dieses Differentiatverhältniß negativ oder positiv wird.

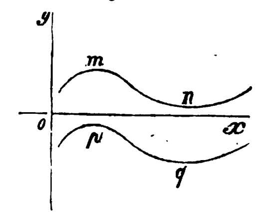
§. 144. Es kann ferner vorkommen, daß der Werth a von x, welcher der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ Genüge leistet, das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung, so wie die folgenden, unendlich groß werden läßt. Vermöge der Betrachtungen der §§. 88 rc. wird man in diesem Falle schließen, daß der Taylor'sche Lehrsatz nicht mehr anwendbar ist, um den Werth der Function in einer nach ganzen Potenzen von h geordneten Reihe darzustellen. Die vorigen Regeln sind also gleichfalls nicht mehr anwendbar, und es bleibt nur noch übrig, über den Lauf der Functionswerthe eine besondere Untersuchung anzustellen, indem man die Function durch Substitution des Werthes $x = a \pm h$ nach negativen oder gebrochenen Potenzen von h entwickelt.

Von den vorigen Regeln sind gleichfalls diejenigen Maxima und Minima ausgeschlossen, welche einem Werthe a von x entsprechen, für welchen das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß oder discontinuirlich wird. In diesem Falle gelangt man wie vorhin nur durch eine unmittelbare Untersuchung der Functionswerthe zum Ziele, indem man den Werth $x = a \pm h$ in die gegebene Function substituirt.

§. 145. Die vorstehenden Resultate können anschaulich

gemacht werden, wenn man die Curven betrachtet, deren Ordinaten y die Werthe von $f(x)$ darstellen, und um größerer Einfachheit willen annimmt, daß die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ continuirlich sein sollen. Alsdann ist klar, daß ein Maximum oder Minimum der Ordinate nur in Punkten wie m, n, p, q, Fig. 29, stattfinden kann, wo die Tangente parallel der Abscissenachse ist, und man also hat $\frac{dy}{dx} = 0$. Insbesondere liegt ein Maximum in m und p, wo die Curve ihre Concavität nach unten wendet, also $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist; ein Minimum dagegen in n und q, wo die Curve ihre Convexität nach unten wendet, also $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist. Negative Größen werden dabei, wie immer, als desto kleiner angesehen, je größer ihr absoluter Werth ist.

Fig. 29.



Man erkennt gleichfalls, daß die Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ nicht nothwendig das Dasein eines Maximum oder Minimum zur Folge hat, weil es Punkte geben kann, in denen die Tangente der Achse der x parallel ist, während dennoch die Function ohne Aufhören zunimmt oder abnimmt. Aber diese Punkte sind immer Beugungspunkte, in denen sich der Sinn der Concavität der Curve ändert, und in denen mithin das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung, indem es sein Vorzeichen wechselt, den Werth Null annimmt. Weiter unten werden die analytischen Kennzeichen, welche den verschiedenen besonderen Punkten der Curven zugehören, ausführlicher erörtert werden.

§. 146. Das allgemeine Verfahren zur Aufsuchung

der Maxima und Minima einer gegebenen Function $y=f(x)$, mit Ausschluß derjenigen, welche die derivirte Function $f'(x)$ unendlich groß oder discontinuirlich machen, besteht also darin, daß man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=0$$

in Bezug auf x auflöst, wodurch man einen oder mehrere Werthe von x erhalten wird. Um zu erkennen, ob diesen Werthen ein Maximum oder Minimum der Function entspricht, substituirt man dieselben in das zweite Differentialverhältniß $\frac{d^2y}{dx^2}$, und sieht nach, welches Vorzeichen ihm dabei zufällt. Sollte dieses Differentialverhältniß zu Null werden, so würde man zu den folgenden übergehen, wie oben näher aus einander gesetzt worden ist.

Wenn y als unentwickelte Function von x durch eine Gleichung von der Form $F(x, y)=0$ gegeben ist, so wird man nach §. 44 ihre Differentialgleichung bilden und in dieser $\frac{dy}{dx}=0$ setzen. Man erhält alsdann eine Gleichung zwischen x und y; und eliminirt man aus dieser Gleichung und der gegebenen $F(x, y)=0$ die Größe y, so gelangt man gleichfalls zur Bestimmung von x.

Einige Beispiele werden das Verfahren erläutern*).

*) Da der Verfasser weiter unten Beispiele gibt, welche für den Standpunkt des Anfängers reichlich verwickelt sind, so erschien es angemessen, die nachfolgenden Beispiele hier einzuschalten. Sie sind aus der Differentialrechnung von Moigno entlehnt. Uebrigens bietet auch schon die Untersuchung der einfachen Functionen in Bezug auf ihre Maxima und Minima, anknüpfend an die §§. 60 ꝛc., einen Stoff zu einfachen Beispielen; die Function x^m allein schließt, je nach der Beschaffenheit des Exponenten m, eine Mannigfaltigkeit von Fällen in sich.

1) Eine Zahl a in zwei Theile x und $a - x$ zu zerlegen, so daß das Product $y = x^m (a-x)^n$ ein Maximum oder Minimum wird. Die Exponenten m und n werden als positive ganze Zahlen vorausgesetzt.

Aus der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}(ma - mx - nx) = 0$$

erhält man die drei Werthe von x

$$x = 0, \quad x = a, \quad x = \frac{ma}{m+n}.$$

Ob diesen Werthen Maxima oder Minima der Function entsprechen, wird man durch das zweite Differentialverhältniß zu entscheiden suchen. Der Ausdruck desselben ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{m-2}(a-x)^{n-2}(\overline{m-1}.a - \overline{m-1}.x - \overline{n-1}.x)(ma-mx-nx)$$
$$- x^{m-1}(a-x)^{n-1}(m+n).$$

Substituirt man hierin den Werth $x = \frac{ma}{m+n}$, so reducirt sich dieser Ausdruck für das zweite Differentialverhältniß auf seinen zweiten Theil, welcher negativ ist; folglich entspricht diesem Werthe von x ein Maximum der Function. Substituirt man darin die Werthe $x = 0$ und $x = a$, so wird der Ausdruck für das zweite Differentialverhältniß nur dann nicht verschwinden, wenn man resp. hat $m = 2$ und $n = 2$. In beiden Fällen reducirt sich dieser Ausdruck auf seinen ersten Theil, welcher positiv wird; folglich entsprechen den genannten Werthen von x zwei Minima der Function. Dieses letzte Resultat bleibt allgemein für alle geraden Werthe von m und n bestehen; denn das erste nicht verschwindende Differentialverhältniß ist stets resp. von der Ordnung m oder n. Für ungerade Werthe von m und n dagegen gehört den entsprechenden Werthen $x = 0$ und $x = a$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Function zu.

Für $m = n = 1$ ist hierin die Lösung der Aufgabe enthalten: Von allen isoperimetrischen Rechtecken, deren Umfang $= 2a$ ist, dasjenige anzugeben, welches den größten Inhalt hat.

2) Von allen isoperimetrischen Dreiecken über einerlei Grundlinie dasjenige anzugeben, welches den größten Inhalt hat.

Es sei $2a$ der gegebene Umfang oder die Summe der drei Seiten, b die gegebene Grundlinie, x eine zweite Seite, also die dritte Seite $2a - b - x$, so wird der Inhalt des Dreiecks ausgedrückt durch

$$\sqrt{a(a-b)(a-x)(b+x-a)}.$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum oder Minimum werden, je nachdem solches mit der Function

$$y = (a-x)(b+x-a)$$

der Fall ist. Man setzt also

$$\frac{dy}{dx} = 2a - b - 2x = 0,$$

woraus $x = a - \frac{b}{2}$, d. h. das Dreieck muß gleichschenklig werden. Das zweite Differentialverhältniß wird $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$, d. h. negativ, also ist der Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks ein Maximum.

3) Von allen Quadraten, welche einem gegebenen Quadrate eingeschrieben werden können, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Inhalt hat.

Nennt man a die Seite des gegebenen Quadrats, und x den Abstand einer Ecke des eingeschriebenen Quadrats von der nächsten Ecke des gegebenen Quadrats, so wird der Inhalt des eingeschriebenen Quadrats

$$y = a^2 - 2ax + 2x^2.$$

Man setzt also

$$\frac{dy}{dx} = -2a + 4x = 0,$$

woraus $x = \frac{a}{2}$, d. h. die Ecken des eingeschriebenen Quadrats fallen in die Mitten der Seiten des gegebenen Quadrats. Das zweite Differentialverhältniß wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$, d. h. positiv, also ist das angezeigte Quadrat ein Minimum.

4) Die Zahl x zu finden, deren $x$te Wurzel ein Maximum ist.

Man hat $y = x^{\frac{1}{x}}$, woraus

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}-2}\,(1 - lx) = 0,$$

welche Gleichung den Werth $x = e$ liefert. Das zweite Differentialverhältniß

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{\frac{1}{x}-4}\,(1 - lx)^2 - x^{\frac{1}{x}-3}\,(3 - 2lx)$$

nimmt für $x = e$ den Werth an $-e^{\frac{1}{e}-3}$, wird also negativ. Folglich ist $e^{\frac{1}{e}}$ ein Maximum der Function $x^{\frac{1}{x}}$.

Man kann auch in diesem Beispiele die Gleichung $y = x^{\frac{1}{x}}$ auf die leichter zu behandelnde Gestalt bringen

$$x\,ly - lx = 0,$$

wo y als unentwickelte Function von x erscheint. Die Differentialgleichung der ersten Ordnung von dieser Gleichung wird

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + ly - \frac{1}{x} = 0,$$

und wenn man hierin $\frac{dy}{dx}=0$ setzt, so hat man

$$ly-\frac{1}{x}=0,$$

woraus in Verbindung mit der primitiven Gleichung sich der Werth $x=e$ ergibt. Ferner wird die Differentialgleichung der zweiten Ordnung

$$\frac{x}{y}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}=0,$$

und werden hierin die Werthe $x=e$ und $\frac{dy}{dx}=0$ substituirt, so erhält man für $\frac{d^2y}{dx^2}$ den Werth $-e^{\frac{1}{e}-3}$, wie oben.

§. 147. Auf den bisherigen Grundlagen gelangt man auch zur Bestimmung der Maxima und Minima der Functionen von zwei Veränderlichen. Um größerer Einfachheit willen soll dabei die Voraussetzung gemacht werden, daß die Taylor'sche Reihe zur Entwickelung dieser Functionen brauchbar sei, wie es in den Anwendungen meistentheils der Fall ist. Es sei gegeben

$$z=f(x,y).$$

Die Entwickelung von $f(x+h,y+k)$ liefert nach dem vorigen Abschnitte

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k)=z+\frac{dz}{dx}h&+\frac{d^2.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dx^2}\frac{h^2}{2}\\+\frac{dz}{dy}k&+\frac{d^2.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dxdy}hk\\&+\frac{d^2.f(x+\theta h,y+\theta k)}{dy^2}\frac{k^2}{2},\end{aligned}$$

wo θ einen ächten Bruch bedeutet. Nimmt man h und k hinreichend klein an, so kann man immer das zweite Glied $\frac{dz}{dx}h+\frac{dz}{dy}k$ größer werden lassen als das dritte, und

folglich das Vorzeichen ihrer Summe abhängig machen von dem Vorzeichen des zweiten Gliedes allein. Damit also den beiden Werthen $x=a$ und $y=b$ ein Maximum oder Minimum der Function z entspreche, d. h. $f(a, b)$ entweder größer oder kleiner sei als $f(a \pm h, b \pm k)$, muß zuerst nothwendig das Glied $\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k$ verschwinden. Wegen der Unabhängigkeit der Größen h und k von einander, kann dieses Glied aber nur dann allgemein verschwinden, wenn man einzeln hat

$$\frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0.$$

Ferner muß, wenn man den beiden Zunahmen h und k irgend welche beliebig kleine Werthe beilegt, die Größe $\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx\,dy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}$ beständig negativ bleiben, für ein Maximum, oder beständig positiv für ein Minimum. Um diese Bedingung auf einfache Kennzeichen zurückzuführen, bilde man die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{k^2} + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}\frac{h}{k} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

und löse dieselbe auf in Bezug auf die unbestimmte Größe $\frac{h}{k}$. Die Wurzeln dieser Gleichung werden imaginär, wenn man hat

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2},$$

welche Bedingung nur erfüllt werden kann, wenn $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ gleiche Vorzeichen haben. Alsdann kann die Größe

$$\frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx\,dy}hk + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2}$$

durch willkürliche Annahmen für h und k weder Null wer-

den, noch ihr Vorzeichen ändern; sie wird beständig das Vorzeichen ihres ersten Gliedes, d. h. das Vorzeichen von $\frac{d^2z}{dx^2}$ beibehalten. Also tritt ein Maximum ein, wenn das Differentialverhältniß $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ ist, und ein Minimum, wenn es positiv ist.

Wenn man dagegen hat

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 > \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2},$$

so werden die Wurzeln der obigen Gleichung reell und ungleich; folglich wird die Größe

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx\,dy}\,hk + \frac{d^2z}{dy^2}\,\frac{k}{2}$$

für willkürliche Annahmen von h und k bald positiv, bald negativ. Es gibt also weder ein Maximum noch ein Minimum.

Eine besondere Betrachtung verdient endlich noch der Fall, wo man hat

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Alsdann hat die obige Gleichung zwei gleiche Wurzeln; und bezeichnet man den Quotienten $\frac{d^2z}{dx\,dy} : \frac{d^2z}{dx^2}$ mit m, so wird

$$\frac{d^2z}{dx^2}\,\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z}{dx\,dy}\,hk + \frac{d^2z}{dy^2}\,\frac{k^2}{2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d^2z}{dx^2}\,(h + mk)^2.$$

Diese Größe behält also bei willkürlichen Annahmen von h und k stets dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d^2z}{dx^2}$, und wird nur dann zu Null, wenn $h = -mk$ ist. Es findet also ein Maximum oder Minimum statt, wenn die Annahme $h = -mk$ den Inbegriff aller Glieder der dritten Ordnung gleichfalls zu Null macht, und dem Inbegriffe aller Glieder

der vierten Ordnung dasselbe Vorzeichen ertheilt, wie $\frac{d^2z}{dx^2}$. Das Maximum wird den negativen Werthen, das Minimum den positiven Werthen von $\frac{d^2z}{dx^2}$ zugehören.

§. 148. Wenn die Werthe a und b, welche die Glieder der ersten Ordnung zu Null werden lassen, die Glieder der zweiten Ordnung gleichfalls zum Verschwinden bringen, so ist aus dem Früheren klar, daß ihnen nur dann ein Maximum oder Minimum der Function entsprechen kann, wenn auch die Glieder der dritten Ordnung für diese Werthe verschwinden, während erst die der vierten Ordnung bestehen bleiben. Ueberdies muß die Summe dieser Glieder der vierten Ordnung beständig das Zeichen — behalten, wenn ein Maximum oder beständig das Zeichen +, wenn ein Minimum eintreten soll. Und so fort.

§. 149. Die vorstehenden Ergebnisse werden anschaulich, wenn man die Function z wie die Ordinate einer Fläche ansieht, deren Absciſſen x und y sind. Soll in irgend einem Punkte dieser Fläche ein Maximum oder Minimum der Ordinate stattfinden, so kann man sich durch diesen Punkt zwei Ebenen, parallel den Ebenen xz und yz, gelegt denken, welche die gegebene Fläche in zwei ebenen Curven durchschneiden. Wird nun die Function z nebst ihren Differentialverhältnissen als continuirlich vorausgesetzt, so müssen vor allen Dingen die Tangenten dieser beiden Schnittcurven in dem in Rede stehenden Punkte parallel der Ebene xy sein, so daß die berührende Ebene der Fläche selbst in diesem Punkte parallel der Ebene xy ist. Diese erste Bedingung liefert die Gleichungen $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$. Ferner müssen die genannten beiden Schnittcurven ihre Concavität nach der nämlichen Seite hin wenden, woraus

folgt, daß die Differentialverhältnisse $\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ einerlei Vorzeichen besitzen müssen. Aber diese letztere Bedingung reicht im allgemeinen noch nicht hin, um für die Ordinate der Fläche die Existenz des Maximum oder Minimum festzustellen; vielmehr wird es außerdem nothwendig zu untersuchen, ob auch alle anderen durch den fraglichen Punkt möglichen Schnittcurven, deren Ebenen beliebige Winkel mit der Ebene xz einschließen, indem sie auf der Ebene xy rechtwinklig stehen, ihre Concavität eben derselben Seite zuwenden. Nun bezeichnen h und k die beiden von einander unabhängigen Zunahmen, welche resp. den beiden Abscissen x und y ertheilt worden sind; folglich kann der Bruch $\frac{k}{h}$ angesehen werden, wie die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen eine jener beliebigen Schnittebenen mit der Ebene xz einschließt. Man sieht demnach, wie man hier auf die frühere Untersuchung zurückgeführt wird, wo für alle Werthe des Bruches $\frac{k}{h}$, von $-\infty$ bis $+\infty$, die Unveränderlichkeit in dem Vorzeichen der Summe der Glieder zweiter Ordnung, d. h. die Unveränderlichkeit in der Richtung der Concavität sämmtlicher Schnittcurven, auf ihre einfachsten analytischen Kennzeichen reducirt wurde. Auch sieht man leicht, welche Gestalt die Fläche in dem fraglichen Punkte besitzen müsse, wenn diese Unveränderlichkeit in der Richtung der Concavität sämmtlicher Schnittcurven nicht stattfindet, d. h. wenn einer der beiden Ausnahmefälle des §. 147 eintritt. In dem ersten dieser beiden Fälle nämlich wird die Fläche sattelförmig gekrümmt sein, in dem zweiten wird sie eine der Ebene xy parallele Rückenlinie enthalten.

§. 150. Auf ähnliche Weise findet man die Bedingun-

gen für das Maximum oder Minimum einer Function, wenn die Anzahl der unabängigen Veränderlichen beträchtlicher ist. Es sei die Function gegeben

$$z = f(v, x, y),$$

so hat man

$$\begin{aligned} f(v+g,\ x+h,\ y+k) = z &+ \frac{dz}{dv} g + \frac{d^2z}{dv^2}\frac{g}{2} + \text{ꝛc.} \\ &+ \frac{dz}{dx} h + \frac{d^2z}{dv\,dx} gh \\ &+ \frac{dz}{dy} k + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{2} \\ &\qquad + \frac{d^2z}{dv\,dy} gk \\ &\qquad + \frac{d^2z}{dx\,dy} hk \\ &\qquad + \frac{d^2z}{dy^2}\frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

Nun kann man immer, wenn man g, h, k hinreichend klein annimmt, das Vorzeichen der Summe aller Glieder, welche dem zweiten oder dem dritten Gliede nachfolgen, von dem Vorzeichen dieses Gliedes allein abhängig machen. Also müssen zuerst die Werthe der Veränderlichen v, x, y, denen ein Maximum oder Minimum der Function z zugehören soll, den drei Gleichungen genügen

$$\frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0.$$

Ferner ist es nothwendig, daß für die nämlichen Werthe von v, x, y die Summe der Glieder der zweiten Ordnung, welche man zur Abkürzung schreiben kann

$$Ag^2 + 2Bgh + Ch^2 + 2Dgk + 2Ehk + Fk^2,$$

ihr Vorzeichen nicht ändere, welche Werthe man auch den beliebig kleinen Größen g, h, k beilegen möge. Dieses erfordert zuerst, daß A, C und F einerlei Vorzeichen besitzen. Aber zu dieser ersten Bedingung treten noch andere, welche

man nach dem Verfahren des §. 147 leicht entdecken kann, wenn man die Natur der Wurzeln der Gleichung

$$Ag^2 + 2Bgh + Ch^2 + 2Dgk + 2Ehk + Fk^2 = 0$$

ins Auge faßt. So ist z. B. klar, daß ein Maximum oder Minimum zuverlässig eintreten wird, wenn die Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf g, h oder k nur imaginäre Werthe gibt. Dieser Fall soll hier allein noch einer nähern Betrachtung unterworfen werden. Löst man nämlich jene Gleichung in Bezug auf g auf, so erhält man imaginäre Werthe, wenn man hat

$$(Bh + Dk)^2 < A(Ch^2 + 2Ehk + Fk^2)$$

oder auch

$$(B^2 - AC)h^2 + 2(BD - AE)hk + (D^2 - AF)k^2 < 0,$$

welche Werthe man auch für h und k setzen mag. Also muß man zuerst haben

$$B^2 - AC < 0 \quad \text{und} \quad D^2 - AF < 0.$$

Sodann aber darf man, indem man die vorstehende Größe gleich Null setzt und in Bezug auf h oder k auflöst, nur imaginäre Werthe erhalten. Die Auflösung in Bezug auf h läßt nun sogleich erkennen, daß die Werthe imaginär werden, wenn man hat

$$(BD - AE)^2 < (B^2 - AC)(D^2 - AF).$$

Es ergibt sich also, daß den aus den drei Gleichungen

$$\frac{dz}{dv} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0$$

hergeleiteten Werthen von v, x, y nothwendig ein Maximum oder Minimum der Function zugehören wird, wenn dieselben 1) den drei Differentialverhältnissen der zweiten Ordnung $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ einerlei Vorzeichen geben, und 2) den Bedingungen Genüge leisten

$$\left(\frac{d^2z}{dv\,dx}\right)^2 < \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \left(\frac{d^2z}{dv\,dy}\right)^2 < \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dvdx}\frac{d^2z}{dvdy} - \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 < \left[\left(\frac{d^2z}{dvdx}\right)^2 - \frac{d^2z d^2z}{dv^2 dx^2}\right]\left[\left(\frac{d^2z}{dvdy}\right)^2 - \frac{d^2z}{dv^2}\frac{d^2z}{dy^2}\right].$$

Und zwar wird ein Maximum, oder ein Minimum eintreten, je nachdem die drei Differentialverhältnisse $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ negativ oder positiv sind.

Wenn dagegen die Gleichung

$$Ag^2 + 2Bgh + Ch^2 + 2Dgk + 2Ehk + Fk^2 = 0$$

ungleiche reelle Wurzeln besitzt, so wird ein Maximum oder Minimum unmöglich. Sind aber die reellen Wurzeln dieser Gleichung einander gleich, so ist eine ähnliche Untersuchung erforderlich, wie am Schlusse des §. 147.

§. 151. Als Anwendung der vorstehenden Regeln werde hier noch die geometrische Aufgabe behandelt: Die kürzeste oder längste unter allen geraden Linien zu finden, welche von einem gegebenen Punkte nach einer gleichfalls gegebenen Curve gezogen werden können.

Es seien a und b die rechtwinkligen Coordinaten des gegebenen Punkts, und x und y die Coordinaten irgend eines Punkts der Curve; sodann ist der Ausdruck für die Länge z der in Rede stehenden geraden Linien

$$z = \sqrt{(x-a)^2 + y - b)^2},$$

und es handelt sich darum, den Werth von x aus der Bedingung zu bestimmen, daß dieser Ausdruck für z so groß oder so klein wie möglich werden soll. Die Differentiation in Bezug auf x gibt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x - a + (y-b)\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

und setzt man dies Differentialverhältniß gleich Null, so hat man

$$x - a + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0, \text{ woraus } \frac{y-b}{x-a} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Da $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels darstellt, welcher zwischen der Tangente der Curve und der Achse der x enthalten ist, so sagt das gefundene Resultat zunächst aus, daß die kürzesten oder längsten Linien, welche von dem gegebenen Punkte nach der Curve gezogen werden können, diese Curve unter rechten Winkeln schneiden müssen. Geht man sodann zum zweiten Differentialverhältniß über, nämlich

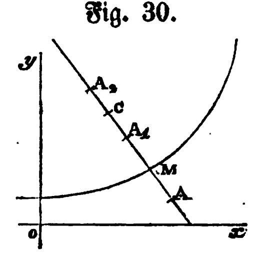
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} - \frac{\left[x - a + (y-b)\frac{dy}{dx}\right]^2}{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

und unterdrückt das zweite Glied, welches vermöge der obigen Gleichung Null ist, so erkennt man, daß das Vorzeichen dieses Differentialverhältnisses nur noch abhängig ist von demjenigen der Größe

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Man nehme nun zuerst an, es sei $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, d. h. die Curve wende ihre Convexität nach unten. Die vorstehende Größe wird alsdann immer positiv sein, wenn $y - b$ positiv ist, d. h. wenn der gegebene Punkt A, Fig. 30, tiefer liegt als der Punkt M der Curve, welcher von der Normale AM getroffen wird. Der Abstand AM hat also in diesem Falle immer ein Minimum, wie auch an sich klar ist. Wenn dagegen, während $\frac{d^2y}{dx^2}$ noch immer positiv bleibt, die Größe $y - b$ negativ ist, so

Fig. 30.



daß der gegebene Punkt höher liegt als der Punkt M, so wird die in Rede stehende Größe positiv sein oder es wird ein Minimum stattfinden, wenn $b - y < \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ ist; und dieselbe Größe wird negativ sein oder es wird ein Maximum eintreten, wenn $b - y > \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ ist. Nun wird man in der Folge, §. 180, sehen, daß der Werth $b - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ einem gewissen Punkte der Normale, C, von solcher Lage zugehört, daß ein aus diesem Punkte mit dem Halbmesser CM beschriebener Kreis mehr als jeder andere Kreis mit der gegebenen Curve zusammenfällt, sobald man sich auf eine unendlich kleine Ausdehnung zu beiden Seiten des Punktes M beschränkt. Dieser Punkt C wird also auf der Normale diejenigen Punkte A_1, für welche der Abstand A_1M ein Minimum ist, von denjenigen Punkten A_2 scheiden, für welche der Abstand A_2M ein Maximum ist.

Zu ähnlichen Bemerkungen würde der Fall Anlaß geben, wo das Differentialverhältniß $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ angenommen wird.

§. 152. Diese Aufgabe führt sogleich zu der folgenden allgemeineren: Die kürzesten oder längsten geraden Linien zu bestimmen, welche von einem Punkte einer gegebenen Curve nach einem Punkte einer gleichfalls gegebenen Curve gezogen werden können.

Bezeichnen x, y die Coordinaten eines beliebigen Punkts der ersten Curve und x', y' diejenigen eines beliebigen Punkts

der zweiten Curve, so wird die Länge z der in Rede stehenden geraden Linien allgemein ausgedrückt durch

$$z = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Dieser Ausdruck ist als eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und x', anzusehen, indem y als Function von x allein, und y' als Function von x' allein betrachtet werden muß. Wendet man also die Regel des §. 147 an, so erhält man zuerst

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x-x' + (y-y')\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{dz}{dx'} = -\frac{x-x' + (y-y')\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}},$$

und wenn man beide Differentialverhältnisse gleich Null setzt,

$$x - x' + (y-y')\frac{dy}{dx} = 0, \quad x - x' + (y-y')\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

woraus

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}.$$

Man sieht also zuerst, daß diejenige gerade Linie, deren Länge ein Maximum oder Minimum ist, beide Curven zugleich unter rechten Winkeln schneiden muß. Bildet man ferner die Differentialverhältnisse der zweiten Ordnung, und unterdrückt sogleich diejenigen Glieder, welche vermöge der vorigen Gleichungen Null werden, so erhält man

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-y')\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}, \quad \frac{d^2z}{dx\,dx'} = -\frac{1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}},$$

$$\frac{d^2z}{dx'^2} = \frac{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 - (y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}.$$

Daraus folgt, daß für das Eintreten eines Maximum oder Minimum zunächst die beiden Größen

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und } 1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2-(y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}$$

einerlei Vorzeichen erhalten müssen, und überdies die Bedingung erfüllt werden muß

$$\left(1+\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}\right)^2<\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-y')\frac{d^2y}{dx^2}\right]\left[1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 - (y-y')\frac{d^2y'}{dx'^2}\right].$$

Diese letztere Bedingung schließt übrigens die vorige schon in sich.

Relative Maxima und Minima.

§. 153. Häufig sind die gesuchten Werthe der Veränderlichen, welche eine gewisse Function V zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, außerdem noch gewissen gegebenen Bedingungen unterworfen, welche durch Gleichungen unter diesen Veränderlichen ausgedrückt werden. Man hat es in solchem Falle mit der Bestimmung eines relativen Maximum oder Minimum zu thun. Aus §. 2 ist übrigens klar, daß die Anzahl dieser Gleichungen nothwendig kleiner sein muß als die Anzahl der Veränderlichen, von denen die vorgelegte Function V abhängt.

Es sei z. B. gegeben

$$V=f(x, y, z),$$

und die Veränderlichen x, y, z seien überdies an die Bedingungsgleichung gebunden

$$L=0,$$

wo L eine gegebene Function von x, y, z bezeichnet. Der Weg, welcher sich hier am natürlichsten darbietet, wird der sein, die Gleichung $L=0$ in Bezug auf eine der Veränderlichen, z. B. z, aufzulösen und den erhaltenen Werth in $f(x, y, z)$ zu substituiren. Die Function V wird alsdann nur noch die beiden Veränderlichen x und y enthal-

ten, welche nun völlig unabhängig sind, und man hat also damit wieder den früheren Fall.

Ebenso wenn unter den drei Veränderlichen x, y, z, die beiden Bedingungsgleichungen bestehen

$$L = 0, \quad M = 0,$$

so wird man aus diesen Gleichungen die Werthe von y und z durch x ausdrücken, und substituirt man dieselben in $f(x, y, z)$, so enthält die Function V nur noch die einzige unabhängige Veränderliche x.

Da es aber nicht selten schwierig und selbst unmöglich ist, die angezeigten Eliminationen der Veränderlichen mit Hülfe der gegebenen Gleichungen wirklich auszuführen, so mußte man noch auf ein anderes Verfahren Bedacht nehmen. Dazu gelangt man durch die Bemerkung, daß die Bedingung des Maximum oder Minimum der Function V fordert, daß man habe

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = 0,$$

während zugleich die Differentiation der Bedingungsgleichung $L = 0$ gibt

$$\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz = 0.$$

Wären nun die Veränderlichen x, y, z völlig unabhängig, so würden die Differentiale dx, dy, dz willkürlich sein, und die erste Gleichung würde mithin zur nothwendigen Folge haben, daß einzeln $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$, $\frac{dV}{dz} = 0$. Aber die Werthe dieser Differentiale müssen zugleich auch der zweiten Gleichung Genüge leisten. Man wird deßhalb zuvor aus dieser zweiten Gleichung den Werth von einem dieser Differentiale, z. B. von dz, bilden und denselben in die erste Gleichung substituiren, welche sodann also nur noch dx und dy enthält. Die Glieder, welche diese beiden Differentiale

als Factor enthalten, setzt man darauf einzeln gleich Null, und erhält somit zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche in Verbindung mit der gegebenen Gleichung $L = 0$ die gesuchten Werthe der drei Veränderlichen liefern.

Wenn zwei Bedingungsgleichungen $L = 0$ und $M = 0$ gegeben sind, so bildet man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dL}{dx}\,dx + \frac{dL}{dy}\,dy + \frac{dL}{dz}\,dz = 0$$

$$\frac{dM}{dx}\,dx + \frac{dM}{dy}\,dy + \frac{dM}{dz}\,dz = 0$$

mit deren Hülfe man aus der Gleichung $\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dy}\,dy + \frac{dV}{dz}\,dz = 0$ zwei von den Differentialen dx, dy, dz eliminirt. Die übrig bleibende Gleichung wird in Verbindung mit den beiden gegebenen Gleichungen $L = 0$ und $M = 0$ die gesuchten Werthe der drei Veränderlichen geben.

Diese Methode bleibt anwendbar, wie groß auch die Anzahl der Veränderlichen, von denen die Function V abhängt, so wie die Anzahl der Bedingungsgleichungen sein mag. Sie erfordert immer nur Eliminationen aus Gleichungen vom ersten Grade, oder lineären Gleichungen.

§. 154. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man aber auch auf folgendem Wege, der für den praktischen Gebrauch weit einfacher ist. Es sei V eine Function der Veränderlichen v, x, y, z, 2c., welche zu einem Maximum oder Minimum werden soll, und daneben seien mehrere Bedingungsgleichungen gegeben, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, 2c., denen diese Veränderlichen genügen sollen. Man bilde die Differentialgleichungen $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, 2c., multiplicire dieselben resp. mit den unbestimmten Factoren

λ, μ, ν, ꝛc. und addire sie zu der Gleichung $dV = 0$, so wird man die einzige Gleichung erhalten

$$dV + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \text{ꝛc.} = 0,$$

oder ausgeführt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dv}dv + \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz + \text{ꝛc.} \\ + \lambda\left(\frac{dL}{dv}dv + \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \text{ꝛc.}\right) \\ + \mu\left(\frac{dM}{dv}dv + \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \text{ꝛc.}\right) \\ + \nu\left(\frac{dN}{dv}dv + \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \text{ꝛc.}\right) \\ + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn man nun den unbestimmten Factoren λ, μ, ν, ꝛc., angemessene Werthe beilegt, so kann man dadurch die Coefficienten derjenigen Differentiale zu Null werden lassen, welche man eliminiren will; hinterher hat man sodann die Coefficienten der übrigen Differentiale, welche willkürlich bleiben, gleich Null zu setzen. Dieses kommt aber auf dasselbe hinaus, als ob man alle Veränderlichen wie unabhängige ansieht, und folglich in der vorstehenden Gleichung die Coefficienten aller Differentiale dv, dx, dy, dz, ꝛc. einzeln gleich Null setzt. Man erhält dadurch Gleichungen, welche in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, ꝛc. genau die nöthige Anzahl geben, um daraus sowol die unbestimmten Factoren λ, μ, ν, ꝛc., eliminiren als auch die gesuchten Werthe der Veränderlichen v, x, y, z, ꝛc. bestimmen zu können.

§. 155. Es sei z. B. unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, deren Oberfläche gleich der Zahl a^2 ist, dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat. Wenn x, y, z die drei Seiten des Parallelepipedon bezeich-

nen, so ist die Function, welche ein Maximum werden soll,

$$V = xyz,$$

und außerdem besteht unter den drei Veränderlichen die Bedingungsgleichung

$$2(xy + xz + yz) = a^2.$$

Nach dem oben Gesagten bildet man die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} yz \,.\, dx + xz \,.\, dy + xy \,.\, dz \\ + \lambda\,[(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz] \end{array}\right\} = 0,$$

woraus, wenn man einzeln die mit den Differentialen dx, dy, dz behafteten Glieder gleich Null setzt,

$$yz + \lambda(y+z) = 0,\; xz + \lambda(x+z) = 0,\; xy + \lambda(x+y) = 0.$$

Eliminirt man nun zuerst λ, so kommt

$$x = y = z,$$

und sodann mit Rücksicht auf die gegebene Bedingungsgleichung

$$x = y = z = \sqrt{\frac{a^2}{6}}.$$

Das gesuchte Parallelepipedon ist also ein Würfel.

Um nachzuweisen, daß dieses Resultat wirklich einem Maximum entspricht, betrachte man in der Entwickelung der Function $V = xyz$ das Glied der zweiten Ordnung, nämlich

$$z \,.\, dx\,dy + y \,.\, dx\,dz + x \,.\, dy\,dz.$$

Soll ein Maximum stattfinden, so muß dieses Glied, nachdem man darin $x = y = z$ gesetzt hat, beständig einen negativen Werth besitzen, welche Werthe man auch für dx, dy, dz setzen mag; vorausgesetzt jedoch, daß diese Werthe der gegebenen Bedingungsgleichung Genüge leisten. Für $x = y = z$ erhält man aber

$$x\,(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz),$$

und für dieselbe Annahme gibt die Bedingungsgleichung

$$dx + dy + dz = 0.$$

Eliminirt man nun dz mit Hülfe dieser Gleichung, so ver=

wandelt sich das in Rede stehende Glied der zweiten Ordnung in

$$- x\,(dx^2 + dx\,dy + dy^2)$$

und bleibt mithin für alle Werthe, welche man für dx und dy setzen mag, beständig negativ.

von Gauß gegeben, mit einem [illegible]

XV. Differentiale der Fläche und des Bogens einer Curve.

---

§. 156. Es stelle Mm, Fig. 31, den Bogen einer Curve vor, deren Gleichung

$$y = f(x)$$

in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben ist. Unter der Fläche dieser Curve versteht man den Raum, welcher zwischen der Achse der x, dem Bogen Mm, und zwei beliebig gewählten Ordinaten PM und pm eingeschlossen liegt. Betrachtet man die erste Ordinate PM als feststehend, und versteht unter x den veränderlichen Abstand op, so ist offenbar die Größe der Fläche $PMmp$ eine Function der Abscisse x, welche von der Beschaffenheit der Curve oder von der Function $f(x)$ abhängt. Jene neue Function soll hier mit u bezeichnet werden. Man sucht den Ausdruck ihres Differentials, d. h. derjenigen Aenderung, welche die Function u erleidet, wenn die Abscisse x um den unendlich kleinen Betrag dx geändert wird.

Fig. 31.

Zu dem Ende nehme man zuerst an, op oder x ändere sich um die endliche Größe Δx, welche durch pq dargestellt wird. Die Fläche u wird sodann um Δu oder um das Trapez $pmnq$ wachsen, und man kann immer Δx klein genug voraussetzen, so daß die Function $f(x)$ in dem Intervalle pq beständig zunimmt oder beständig abnimmt, mithin dieses Trapez zwischen den beiden Rechtecken von den Höhen pm und qn und der gemeinschaftlichen Grundlinie pq enthalten ist. Man kann also schreiben

$$\Delta u = (y + \omega)\,\Delta x, \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = y + \omega,$$

wo ω eine Größe bedeutet, deren absoluter Werth geringer ist als derjenige von Δy. Geht man nun zu beiden Seiten dieser letzten Gleichung zu den Gränzen über, indem Δx zu Null wird, so erhält man

$$\frac{du}{dx} = y, \quad \text{und} \quad du = y dx.$$

Das Differential der Fläche einer Curve ist also gleich dem Producte aus dx und derjenigen Function von x, welche den Werth der Ordinate y ausdrückt. Oder, wenn man will, die Fläche der Curve ist diejenige primitive Function, von welcher die Ordinate das Differentialverhältniß oder die derivirte Function der ersten Ordnung darstellt.

§. 157. Man betrachte ferner die Länge des Bogens einer Curve, welcher sich von einem beliebigen festen Punkte M, Fig. 31, bis zu einem Punkte m erstreckt, dessen Abscisse op durch x dargestellt wird. Diese Länge kann wie eine Function der Abscisse x angesehen werden; sie werde mit s bezeichnet. Man sucht den Ausdruck ihres Differentials.

Es stelle pq die endliche Differenz Δx dar, welche immer klein genug angenommen werden kann, so daß nicht nur die Ordinate y in dem Intervalle pq beständig zunimmt oder beständig abnimmt, sondern auch der ganze zugehörige

Bogen Δs oder mn seine Concavität nach einerlei Seit hin wendet. Man kann sodann, gemäß den bekannten Sätzen von Archimedes, die Länge dieses Bogens ansehen als enthalten zwischen der Länge seiner Sehne mn und Läng der Theile $mt + tn$ der Tangenten seiner beiden Endpunkte. Also ist um so mehr der Bogen enthalten zwischen den beiden Tangenten mr und ns; denn mr ist kleiner als di Sehne, und st ist größer als mt. Da nun $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels darstellt, welchen die Tangente im Punkte m mit der Achse der x einschließt, so ha man $mr = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Setzt man ferner zur Abkürzung $\varphi(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, so wird $\varphi(x + \Delta x)$ derjenige Werth von $\varphi(x)$, welcher dem Punkte n der Curve entspricht. Also hat man $ns = \Delta x \,.\, \varphi(x + \Delta x)$. Oder wenn man $\varphi(x + \Delta x)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt und die Reihe mit dem Gliede der ersten Ordnung abbricht, so ist Δs stets enthalten zwischen den Größen

$$\Delta x \,.\, \varphi(x) \text{ und } \Delta x \,.\, \left[\varphi(x) + \frac{d.\varphi(x + \theta \,.\, \Delta x)}{dx} \Delta x\right].$$

Man kann also schreiben

$$\Delta s = \Delta x \,.\, [\varphi(x) + \omega], \text{ oder } \frac{\Delta s}{\Delta x} = \varphi(x) + \omega,$$

wo ω eine Größe bedeutet, deren absoluter Werth geringer ist als derjenige von $\frac{d : \varphi(x + \theta \,.\, \Delta x)}{dx} \Delta x$. Daraus folgt, indem man zu beiden Seiten zu den Gränzen für verschwindende Δx übergeht,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ und } ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

§. 158. In dem Vorstehenden ist die Voraussetzung gemacht worden, daß die Ordinate, von welcher aus die

Fläche *u* gezählt wird, oder daß der feste Punkt der Curve, von welchem aus der Bogen *s* gerechnet wird, eine solche Lage besitze, daß *u* und *s* gleichzeitig mit x wachsen. Wenn es sich entgegengesetzt verhielte, so müßte man ihren Differentialen das Vorzeichen — geben, und schreiben

$$du = -ydx, \quad ds = -dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ueberdies ändert sich das Vorzeichen des Differentials du mit dem Vorzeichen der Ordinate y; und im allgemeinen, sobald man die positiven y von unten nach oben zählt, hat man die Theile der Fläche einer Curve, welche oberhalb der Achse der x liegen, als positiv, und die Theile, welche unterhalb dieser Achse liegen, als negativ anzusehen.

XVI. Berührung ebener Curven.

§. 159. Man sagt von zwei Curven, sie **berühren** einander, sobald sie einen gemeinschaftlichen Punkt und in demselben eine gemeinschaftliche Tangente besitzen. Wenn ferner zwei Curven *pq* und *rs* eine dritte Curve *mn* in dem nämlichen Punkte *M* berühren, so schreibt man der Curve *pq*, welche zwischen den beiden andern hindurchgeht, eine innigere Berührung mit *mn* zu, als der Curve *rs*. In diesem Sinne hat man **Berührungen von höheren Ordnungen** unterschieden, deren Kennzeichen leicht aus der Betrachtung der Differentialverhältnisse oder derivirten Functionen der höheren Ordnungen abgeleitet werden können.

Es seien

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = \varphi(x)$$

die Gleichungen zweier Curven in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten; x bezeichne die Abscisse des den beiden Curven gemeinschaftlichen Punkts, und $x + h$ die Abscisse eines benachbarten Punkts. Die Ordinaten dieses letzteren werden sodann resp. ausgedrückt werden durch

$$f(x) + \frac{d.f(x)}{dx} h + \frac{d^2.f(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{rc.}, \quad \text{und}$$

$$\varphi(x) + \frac{d.\varphi(x)}{dx} h + \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \text{rc.}$$

Besitzen nun beide Curven in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, eine gemeinschaftliche Tangente, so hat man nicht nur $\varphi(x) = f(x)$, sondern auch $\frac{d.\varphi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$. Sobald dieser Bedingung Genüge geschehen ist, so kann man aber auch sicher sein, daß keine dritte Linie, deren Gleichung etwa $y = \psi(x)$ sein mag, zwischen den beiden gegebenen Curven hindurchgehen kann, wenn man nicht gleichfalls hat $\frac{d.\psi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$. Denn die Differenz der Ordinaten der beiden gegebenen Curven, für einerlei Abscisse $x + h$, kann ausgedrückt werden durch

$$\left(\frac{d^2.\varphi(x+\theta h)}{dx^2} - \frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2};$$

dagegen wenn die in Rede stehende Bedingung nicht erfüllt wäre, so würde die Differenz zwischen den Ordinaten der dritten und ersten Curve ausgedrückt werden durch

$$\left(\frac{d.\psi(x)}{dx} - \frac{d.f(x)}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.\psi(x+\theta h)}{dx^2} - \frac{d^2.f(x+\theta h)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2}.$$

In diesen Ausdrücken bedeutet θ eine unbestimmte und zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl, welche in den verschiedenen Functionen verschiedene Werthe haben kann. Aber man sieht leicht, daß für hinreichend kleine Werthe von h

der letzte Ausdruck stets größer gemacht werden kann, als der erste; welches am deutlichsten wird, wenn man zuvor den gemeinschaftlichen Factor h aus beiden Ausdrücken hinauswirft. Folglich kann eine Curve $y = \psi(x)$, für welche man nicht hat $\frac{d \,.\, \psi(x)}{dx} = \frac{d \,.\, f(x)}{dx}$, nicht zwischen den beiden Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ hindurchgehen, für welche man hat $\frac{d \,.\, \varphi(x)}{dx} = \frac{d \,.\, f(x)}{dx}$.

Zwei Linien, welche einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen und für welche überdies das Differentialverhältniß der ersten Ordnung der Ordinate einerlei Werth in diesem Punkte hat, gehen mit einander eine Berührung der ersten Ordnung ein.

§. 160. Man nehme ferner an, daß für die beiden gegebenen Curven die Differentialverhältnisse der beiden ersten Ordnungen einerlei Werthe besitzen. Die Differenz unter denjenigen Ordinaten dieser beiden Curven, welche der Abscisse $x + h$ angehören, wird sodann ausgedrückt werden durch

$$\left(\frac{d^3 \,.\, \varphi(x+\theta h)}{dx^3} - \frac{d^3 \,.\, f(x+\theta h)}{dx^3}\right) \frac{h^3}{2 \,.\, 3};$$

dagegen für eine dritte Curve, welche die erste berührte, jedoch ohne sonst der in Rede stehenden Bedingung zu genügen, würde die Differenz der Ordinaten ausgedrückt werden durch

$$\left(\frac{d^2 . \psi(x)}{dx^2} - \frac{d^2 . f(x)}{dx^2}\right) \frac{h^2}{2} + \left(\frac{d^3 . \psi(x+\theta h)}{dx^3} - \frac{d^3 . f(x+\theta h)}{dx^3}\right) \frac{h^3}{2 \,.\, 3}.$$

Und da der letztere Ausdruck, sobald man h nur klein genug annimmt, stets größer wird als der erstere, so kann mithin die dritte Curve niemals zwischen den beiden anderen hindurchgehen. Es wird folglich keine Curve, für welche nicht die Differentialverhältnisse der beiden ersten Ordnungen

gleich denen der Curve $y = f(x)$ sind, zwischen dieser Curve und der Curve $y = \varphi(x)$ hindurchgehen, für welche die genannte Gleichheit stattfindet.

Von Linien, für welche in einem gemeinschaftlichen Punkte die Differentialverhältnisse der beiden ersten Ordnungen einen gemeinschaftlichen Werth besitzen, sagt man, sie gehen mit einander eine Berührung der zweiten Ordnung ein.

§. 161. Auf die angegebene Weise kann man fortfahren, und man nennt überhaupt eine Berührung der $n$ten Ordnung diejenige, wo für die beiden Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ sowol die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ als auch die n ersten Differentialverhältnisse derselben für einerlei Abscisse x einen gemeinschaftlichen Werth annehmen. Diese Berührung wird sodann dadurch näher charakterisirt, daß keine andere Linie $y = \psi(x)$ zwischen jenen beiden Curven hindurchgehen kann, wenn sie nicht gleichfalls der Bedingung genügt, daß die n ersten Differentialverhältnisse der Function $\psi(x)$, für die nämliche Abscisse x, den n ersten Differentialverhältnissen der Function $f(x)$ gleich werden. Man muß die Sache so ansehen, als ob verschiedene Curven, welche sich in einerlei Punkte berühren, eine desto innigere Berührung mit einander eingehen, je größer die Anzahl derjenigen Differentialverhältnisse ist, deren Werthe zusammenfallen. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Differentialverhältnisse unterscheidet die Berührungen der verschiedenen Ordnungen, welche Unterscheidung durch die Geometrie allein unmöglich sein würde.

§. 162. Noch kann man bemerken, daß zwei Linien, welche mit einander eine Berührung der ersten Ordnung eingehen, sich im allgemeinen nicht schneiden, weil die Differenz der Ordinaten in den benachbarten Punkten,

welche k^2 als Factor enthält, nicht mit h ihr Vorzeichen ändert. Wenn dagegen eine Berührung der zweiten Ordnung eintritt, so schneiden sich die Linien, weil die Differenz der Ordinaten in den benachbarten Punkten den Factor h^3 besitzt, also mit h ihr Vorzeichen ändert. Ueberhaupt werden zwei Linien bei ihrer Berührung einander schneiden oder nicht, je nachdem die Berührung von einer geraden oder von einer ungeraden Ordnung ist.

§. 163. Die einfachsten Linien, welche man mit einer gegebenen Curve zur Berührung bringen kann, sind die parabolischen Linien*). Es sei wie bisher

$$y = f(x)$$

die Gleichung der gegebenen Curve, und

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Hx^n$$

die Gleichung einer parabolischen Curve vom $n$ten Grade. Die Aufgabe besteht sodann darin, die constanten Coefficienten $A, B, C, D, \dots H$, so zu bestimmen, daß die parabolische Curve in einem Punkte, dessen Coordinaten x' und y' sein mögen, mit der gegebenen Curve eine Berührung der $n$ten Ordnung eingehe. Vermöge des Vorhergehenden tritt diese Berührung ein, wenn die Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$, welche aus der zweiten Gleichung folgen, für $x = x'$ denjenigen Werthen der nämlichen Größen gleich werden, welche sich aus der ersten Gleichung ergeben. Aber die Bestimmung der Constanten $A, B, C, \dots H$, wird sofort dieser Bedingung gemäß ausgeführt

*) Davon zu unterscheiden sind die Parabeln höherer Ordnungen, deren allgemeine Gleichung ist $y^m = Ax^n$, wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten.

sein, wenn man als Gleichung der parabolischen Curve annimmt

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2} + \frac{d^3y'}{dx'^3}\frac{(x-x')^3}{2.3} + \ldots + \frac{d^ny'}{dx'^n}\frac{(x-x')^n}{2.3.4\ldots n},$$

wie sich ohne Mühe beweisen läßt.

Die Gleichung der betrachteten parabolischen Curve enthielt $n+1$ willkürliche Constanten, und man konnte ihr eine Berührung der $n$ten Ordnung mit einer beliebigen gegebenen Curve verschaffen. Ueberhaupt kann man immer zwischen einer gegebenen Curve und einer zweiten, deren Constanten noch willkürlich sind, in einem gegebenen Punkte der ersteren eine Berührung herstellen, deren Ordnung um eine Einheit geringer ist, als die Anzahl der willkürlichen Constanten in der Gleichung dieser zweiten Curve. Denn man erhält zur Lösung dieser Aufgabe immer genau so viel Bedingungsgleichungen, als es Constanten zu bestimmen gibt.

§. 164. Wenn man sich auf den ersten Grad beschränkt, so erhält man einfacher

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche die Curve $y = f(x)$ in dem Punkte dessen Coordinaten x' und y' sind, berührt. Zwischen dieser Tangente und der Curve kann keine andere gerade Linie hindurchgelegt werden.

§. 165. Die Gleichung vom zweiten Grade gibt

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{2},$$

welche Gleichung der gewöhnlichen oder Apollonischen Parabel angehört, deren Achse parallel zur Achse der y liegt. Sie berührt gleichfalls die gegebene Curve in dem

Punkte, dessen Coordinaten x' und y' sind, und geht überdies mit dieser Curve eine Berührung der zweiten Ordnung ein, oder ist von ihr, wie man auch zu sagen pflegt, eine osculatorische Curve. Zwischen dieser Parabel und der gegebenen Curve kann keine andere Apollonische Parabel, deren Achse gleichfalls zur Achse der y parallel liegt, hindurchgeführt werden.

§. 166. Ueberhaupt erkennt man, sobald in einer gegebenen Curve ein beliebiger Punkt M festgestellt worden ist, daß die Aufgabe, einer zweiten Curve in diesem Punkte eine Berührung der $n$ten Ordnung mit der ersteren zu ertheilen, vollständig darauf zurückkommt, daß der Gleichung dieser zweiten Curve und ihren Differentialgleichungen bis zur Ordnung n einschließlich durch die Werthe der Abscisse x' des Punktes M, der Ordinate y' dieses Punkts, und der Differentialverhältnisse $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, $\frac{d^3y'}{dx'^3}$, ... $\frac{d^ny'}{dx'^n}$ dieser Ordinate Genüge geschehe.

XVII. Tangenten und Normalen ebener Curven. Asymptoten.

§. 167. Die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte einer gegebenen Curve ist, nach dem Vorigen,

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x').$$

Darin bedeuten x' und y' die Coordinaten des Berührungs-

punktes, und $\frac{dy'}{dx'}$ ist der Werth des Differentialverhältnisses der ersten Ordnung von der Function $y = f(x)$, welcher in dem nämlichen Punkte stattfindet.

Die Gleichung der Normale, welche unmittelbar aus derjenigen der Tangente hergestellt werden kann, ist

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \text{ oder } x - x' + \frac{dy'}{dx'}(y - y') = 0.$$

§. 168. Wenn man die Richtung einer geraden Linie ausdrücken will, so denkt man sich diese Linie, sich selbst parallel, nach dem Anfangspunkte der Coordinaten verlegt, und betrachtet daselbst die beiden Winkel, welche sie mit den positiven Seiten der Coordinatenachsen einschließt. Es mögen α und β die Winkel bezeichnen, welche die Tangente einer Curve mit denjenigen Seiten der Achsen bildet, auf denen man resp. die positiven x und die positiven y zählt. Der Winkel α hat sodann, unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, zu seiner trigonometrischen Tangente den Ausdruck $\frac{dy'}{dx'}$, und der Cosinus des Winkels β ist immer gleich dem Sinus des Winkels α. Also hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}.$$

Wenn man ebenso mit λ und μ die beiden Winkel bezeichnet, welche die Normale einer Curve mit denjenigen Seiten der Achsen einschließt, auf denen man resp. die positiven x und die positiven y zählt, so hat der Winkel λ zu seiner trigonometrischen Tangente den Ausdruck $-\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}$,

und der Cosinus des Winkels μ ist immer gleich dem Sinus des Winkels λ. Folglich hat man

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}, \quad \cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}.$$

Man kann nach Gefallen die Wurzelgröße $\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$ mit dem Vorzeichen + oder dem Vorzeichen — nehmen; aber man muß ihr in den Ausdrücken für die Cosinus der beiden Winkel, welche zu einerlei Linie gehören, auch einerlei Vorzeichen geben. Gemäß dem Vorzeichen der Wurzelgröße beziehen sich nämlich die beiden Winkel entweder auf die eine, oder auf die andere Seite der Linie, vom Anfangspunkte der Coordinaten aus gerechnet. So z. B. wenn die Wurzelgröße positiv genommen wird, so versteht man diejenige Seite *MS*, Fig. 32, der Tangente, welche in Bezug auf den Punkt *M* nach der Seite der positiven x liegt, und ebenso diejenige Seite *MN* der Normale, welche in Bezug auf den nämlichen Punkt nach der Seite der positiven y liegt.

Fig. 32.

§. 169. Man kann auch nach §. 157, wenn man wie dort mit ds das Differential des Bogens der Curve bezeichnet, die Cosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte *M* mit den Achsen der x und der y bildet, ausdrücken durch

$$\cos\alpha = \frac{dx'}{ds'}, \quad \text{und} \quad \cos\beta = \frac{dy'}{ds'},$$

und ebenso die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen der x und der y einschließt durch

$$\cos\lambda = -\frac{dy'}{ds'}, \text{ und } \cos\mu = \frac{dx'}{ds'}.$$

In diesen Formeln kann man das Element ds' nach Gefallen mit dem Vorzeichen $+$ oder dem Vorzeichen $-$ behaftet ansehen, weil nichts im voraus den Sinn feststellt, in welchem der Bogen s gezählt werden soll. Aber in den beiden zusammengehörigen Formeln muß jenes Differential immer einerlei Vorzeichen erhalten; und je nachdem man ds' positiv oder negativ nimmt, denkt man sich die Winkel α, β, oder λ, μ durch die eine oder die andere der beiden Seiten der Tangente oder Normale begränzt, welche durch den Berührungspunkt von einander getrennt werden.

§. 170. Es sei M, Fig. 32, ein Punkt einer Curve, deren Tangente und Normale für diesen Punkt man resp. bis zu ihren Durchschnittspunkten T und R mit der Achse der x verlängert hat. Die Ordinate y' des Berührungspunktes ist durch PM dargestellt, und überdies erhält man unmittelbar aus der Figur folgende vier Größen:

$$\text{Tangente } MT = \frac{y'}{\sin\alpha} = \frac{y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}}{\frac{dy'}{dx'}}$$

$$\text{Subtangente } PT = \frac{y'}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{y'}{\frac{dy'}{dx}}$$

$$\text{Normale } MR = \frac{y'}{\cos\alpha} = y'\sqrt{1+\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}$$

$$\text{Subnormale } PR = y' \operatorname{tang}\alpha = y'\frac{dy'}{dx'}.$$

Die Ordinate ist mittlere Proportionale zwischen Subtangente und Subnormale.

§. 171. Die Gleichung einer Curve wird oft in der unentwickelten Form gegeben

$$F(x, y) = 0.$$

Die Differentialgleichung derselben wird sodann

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0,$$

und man hat, gemäß dem §. 44, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. Setzt man diesen Werth für $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung der Tangente §. 167, so wird dieselbe

$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') = 0.$$

Man kann also aus der Differentialgleichung der Curve sofort die Gleichung der Tangente herstellen, wenn man für das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniß $\frac{y-y'}{x-x'}$ an die Stelle setzt.

Die Gleichung der Normale wird auf gleiche Weise

$$\frac{dF}{dy'}(x - x') - \frac{dF}{dx'}(y - y') = 0.$$

Man kann also gleichfalls aus der Differentialgleichung der Curve die Gleichung der Normale bilden, indem man für das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniß $-\frac{x-x'}{y-y'}$ an die Stelle setzt.

Bezeichnet man ferner, wie oben, mit α und β die Winkel, welche die Tangente mit den Achsen der x und der y einschließt, so hat man

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}.$$

Und wenn man mit λ und μ die Winkel bezeichnet, welche

die Normale mit den Achsen der x und der y einschließt, so wird

$$\cos\lambda = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2}}$$

§. 172. Wenn die Curven mit Armen versehen sind, welche sich ins Unendliche erstrecken, so ereignet es sich zuweilen, daß diese Arme gewissen geraden Linien ohne Aufhören näher und näher kommen, ohne jedoch jemals damit zusammenzufallen. Solche gerade Linien nennt man Asymptoten der Curven.

Man kann die Asymptoten ansehen wie Tangenten, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Die allgemeine Gleichung

$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') = 0$$

gehört einer jeden beliebigen Tangente derjenigen Curve zu, welche durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben ist. Sie wird also einer Asymptote dieser Curve angehören, wenn man die Coordinaten x' oder y' des Berührungspunktes unendlich groß annimmt. Will man demnach die Gleichung der Asymptoten einer gegebenen Curve erhalten, so wird man aus der Gleichung $F(x', y') = 0$ den Werth von y' durch x' ausdrücken und denselben in die obige allgemeine Gleichung der Tangente hineinsetzen; läßt man sodann hierin x' positiv oder negativ unendlich werden, so erhält man alle diejenigen Asymptoten, welche nicht mit der Achse der y zusammenfallen und ihr nicht parallel sind. Um diese letzteren zu finden, falls es deren gibt, wird man aus der Gleichung $F(x', y') = 0$ den Werth von x' und y' ausdrücken und denselben in die nämliche allgemeine Gleichung der Tangente hineinsetzen; läßt man

nun hierin y' positiv oder negativ unendlich werden, so hat man nur noch diejenigen Resultate zu beachten, welche nicht zugleich einem unendlich großen Werthe von x' zugehören.

§. 173. Dasselbe Verfahren kann auch in dem Falle angewandt werden, wo es sich nicht mehr um eine gerade Linie, sondern um irgend eine beliebige asymptotische Curve handelt. Nachdem man nämlich nach den Vorschriften des XVI. Abschnitts die Gleichung der Curve $y = \varphi(x)$ so bestimmt hat, daß dieselbe mit der Curve $y = f(x)$ in einem Punkte, dessen Coordinaten sind x' und y', eine Berührung der ersten Ordnung eingeht, wird man die Gestalt, welche die Curve $y = \varphi(x)$ annehmen muß, um eine asymptotische Curve der anderen zu werden, dadurch erkennen, daß man in ihre Gleichung die Werthe von y' durch x', oder von x' durch y', die man aus der Gleichung $y' = f(x')$ nimmt, hineinsetzt und sodann x' oder y' unendlich groß werden läßt.

§. 174. Einige Anwendungen mögen die vorigen Entwickelungen erläutern.

Die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel in Bezug auf ihre Achsen, deren halbe Längen durch a und b bezeichnet werden mögen, ist

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Differentialgleichung wird also

$$\frac{x}{a^2}\,dx \pm \frac{y}{b^2}\,dy = 0,$$

und gibt

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Ferner werden die Gleichungen der Tangente und der Normale resp.

$$\frac{x'}{a^2}(x-x') \pm \frac{y'}{b^2}(y-y') = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1;$$

$$\pm \frac{y'}{b^2}(x-x') - \frac{x'}{a^2}(y-y') = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{y'x}{b^2} \mp \frac{x'y}{a^2} = x'y'\left(\frac{1}{b^2} \mp\right.$$

Und für die Ausdrücke der Subtangente und Subnormale erhält man

$$\text{Subtangente} = x' - \frac{a^2}{x'}, \quad \text{Subnormale} = \mp \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

Beide Größen sind negativ für die Ellipse, und positiv für die Hyperbel, so lange man x' positiv annimmt: umgekehrt, sobald man x' negativ annimmt. Ueberdies ist die Subtangente unabhängig von der kleinen Achse $2b$, und sie behält also z. B. für den Kreis und für alle Ellipsen, welche über der nämlichen großen Achse $2a$ construirt werden können, den nämlichen Werth. Die Subnormale hat zu ihrer Abscisse, für alle Punkte der nämlichen Ellipse oder der nämlichen Hyperbel, stets einerlei Verhältniß.

In der gleichseitigen Hyperbel, deren Gleichung in Bezug auf ihre Asymptoten ist

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

und deren Differentialgleichung

$$ydx + xdy = 0, \quad \text{woraus} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

hat man

$$\text{Subtangente} = -x', \quad \text{Subnormale} = -\frac{y'^2}{x'}.$$

Die Subtangente ist gleich der Abscisse, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, und muß also von der Ordinate aus nach derjenigen Seite genommen werden, welche von dem Anfangspunkte der Coordinaten abgewandt ist.

§. 175. Um die Asymptoten der Hyperbel zu finden, wird man in die Gleichung ihrer Tangente

$$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = 1$$

den Werth von $\frac{y'}{b}$ hineinsetzen, welchen man aus der Gleichung der Curve $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ entnimmt, nämlich $\frac{y'}{b} = \pm\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1}$. Man erhält dadurch

$$\frac{x'x}{a^2} \mp \frac{y}{b}\sqrt{\frac{x'^2}{a^2} - 1} = 1, \text{ oder } \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}} = \frac{a}{x'}.$$

Läßt man hierin x' unendlich groß werden, so kommt

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

als Gleichung der gesuchten Asymptoten.

§. 176. In der Parabel, welche durch die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

dargestellt wird, hat man als Differentialgleichung

$$ydy = pdx, \quad \text{woraus} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$y'(y-y') = p(x-x'), \text{ oder } y'y = p(x+x'),$$

und die Gleichung der Normale

$$y'(x-x') + p(y-y') = 0.$$

Für die Ausdrücke der Subtangente und der Subnormale erhält man

Subtangente $= 2x'$, **Subnormale** $= p$.

Die Subtangente beträgt immer das Doppelte der Abscisse, welche hier vom Scheitel der Curve aus gerechnet wird. Die Subnormale ist constant in der ganzen Erstreckung der Curve.

§. 177. Die Gleichung der logarithmischen Linie

$$y = \log x$$

gibt, indem man ihre Coordinaten unter einander vertauscht, die Gleichung

$$y = a^x,$$

wo a die Basis des logarithmischen Systems bezeichnet, welche hier immer größer als die Einheit vorausgesetzt wird. Die Differentialgleichung dieser letzteren wird

$$dy = la \,.\, a^x \, dx;$$

und daraus erhält man für die Gleichungen der Tangente und der Normale resp.

$$y - y' = la \,.\, a^{x'} (x - x'),$$

$$y - y' + \frac{a^{-x'}}{la} (x - x') = 0.$$

Ferner findet man

$$\text{Subtangente} = \frac{1}{la}, \quad \text{Subnormale} = la \,.\, a^{2x'}.$$

Also ist die Subtangente constant und gleich dem Modulus des logarithmischen Systems. Dagegen die Subnormale nimmt rasch zu, wenn der Berührungspunkt sich mehr und mehr von dem Anfange der Coordinaten entfernt.

Wenn man nach der Vorschrift des §. 172 in der Gleichung der Tangente für y' seinen Werth $a^{x'}$ an die Stelle setzt, so kommt

$$y - a^{x'} = la \,.\, a^{x'} (x - x'),$$

und läßt man hierin $x' = -\infty$ werden, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$y = 0.$$

Daraus folgt, daß die Achse der x Asymptote der Curve nach der Seite der negativen x ist. In dieser Herleitung ist zu bemerken, daß man 0 als den Werth des Gliedes $-x' a^{x'}$ ansehen muß, wenn man darin $x' = -\infty$ werden läßt. Denn dieses Product ist gleichbedeutend mit dem Bruche $\frac{x'}{a^{x'}}$, wenn man in diesem $x' = \infty$ nimmt. Nun ist $a > 1$, folglich la positiv. Die Gleichung des §. 107

$$a^{x'} = 1 + x' \, la + \frac{x'^2}{2} (la)^2 + \text{rc.}$$

Die Normale trifft immer die Achse der x in dem Punkte r, Fig. 33, wo diese Achse von dem erzeugenden Kreise berührt wird. Die Tangente geht durch den gegenüberliegenden Punkt s des Durchmessers rs.

XVIII. Krümmungskreis und Evoluten ebener Curven.

---

§. 179. Die einfachste Linie nächst der geraden Linie ist der Kreis, und da die allgemeine Gleichung des Kreises drei Constanten enthält, über welche man nach Gefallen verfügen darf, so kann man einem Kreise eine Berührung der zweiten Ordnung mit einer gegebenen Curve ertheilen. Dabei treten die Begriffe der §§. 159 ꝛc. in Kraft. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer gegebenen Curve, und

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \varrho^2$$

die Gleichung eines Kreises, in welcher α und β die Coordinaten des Mittelpunkts und ϱ den Halbmesser bezeichnen.

1) Nach dem Obigen gibt man diesem Kreise eine Berührung der ersten Ordnung mit der vorgelegten Curve, in einem Punkte M derselben, dessen Coordinaten x' und y' sind, wenn man die Constanten α, β und ϱ so bestimmt, daß der Gleichung des Kreises und ihrer Differentialgleichung der ersten Ordnung, nämlich

$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

durch die Werthe von x', y' und $\frac{dy'}{dx'}$, welche dem Punkte M der Curve angehören, Genüge geschieht. Man hat also die beiden Gleichungen

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega).$$

Aus der letzteren Gleichung folgt

$$\cos\omega = \frac{R-y}{R}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{R},$$

folglich erhält man

$$x = R \operatorname{arc\,cos} \frac{R-y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}$$

als Gleichung der Cycloide. Die Curve besteht aus einer unendlichen Menge congruenter Theile, sowol nach der Seite der positiven als der negativen x, welche sämmtlich oberhalb der Achse der x liegen und auf dieser Achse ein Intervall oa, gleich $2R\pi$, umfassen. Jeder dieser Theile ist überdies aus zwei symmetrischen Hälften zusammengesetzt.

Die beiden vorstehenden Ausdrücke von x und y geben, differentiirt,

$$dx = R(1 - \cos\omega)\,d\omega, \quad dy = R\sin\omega\,d\omega.$$

Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{\sqrt{2Ry - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}.$$

Die Gleichungen der Tangente und der Normale werden also, vermöge der allgemeinen Formeln des §. 107, resp.

$$y - y' = \sqrt{\frac{2R}{y'} - 1}\,.\,(x - x')$$

$$y - y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2R}{y'} - 1}}\,(x - x').$$

Ueberdies hat man

$$\text{Tangente} = y'\sqrt{\frac{2Ry'}{2Ry' - y'^2}}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y'^2}{\sqrt{2Ry' - y'^2}}$$

$$\text{Normale} = \sqrt{2Ry'}$$

$$\text{Subnormale} = \sqrt{2Ry' - y'^2}.$$

Die Normale trifft immer die Achse der x in dem Punkte r, Fig. 33, wo diese Achse von dem erzeugenden Kreise berührt wird. Die Tangente geht durch den gegenüberliegenden Punkt s des Durchmessers rs.

XVIII. Krümmungskreis und Evoluten ebener Curven.

---

§. 179. Die einfachste Linie nächst der geraden Linie ist der Kreis, und da die allgemeine Gleichung des Kreises drei Constanten enthält, über welche man nach Gefallen verfügen darf, so kann man einem Kreise eine Berührung der zweiten Ordnung mit einer gegebenen Curve ertheilen. Dabei treten die Begriffe der §§. 159 ꝛc. in Kraft. Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer gegebenen Curve, und

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \varrho^2$$

die Gleichung eines Kreises, in welcher α und β die Coordinaten des Mittelpunkts und ϱ den Halbmesser bezeichnen.

1) Nach dem Obigen gibt man diesem Kreise eine Berührung der ersten Ordnung mit der vorgelegten Curve, in einem Punkte M derselben, dessen Coordinaten x' und y' sind, wenn man die Constanten α, β und ϱ so bestimmt, daß der Gleichung des Kreises und ihrer Differentialgleichung der ersten Ordnung, nämlich

$$\alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

durch die Werthe von x', y' und $\frac{dy'}{dx'}$, welche dem Punkte M der Curve angehören, Genüge geschieht. Man hat also die beiden Gleichungen

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = \varrho^2$$
$$\alpha - x' + (\beta - y')\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

denen die Werthe von α, β und ϱ genügen müssen. Die zweite Gleichung, wenn man in ihr α und β wie veränderliche Coordinaten ansieht, gehört der Normale an, welche die Curve im Punkte M besitzt, und eine von diesen beiden Coordinaten bleibt unbestimmt. Man schließt daraus, daß jeder Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Normale liegt, die Curve berühren wird, welches Resultat man leicht voraussehen konnte.

§. 180. 2) Damit der Kreis eine Berührung der zweiten Ordnung mit der gegebenen Curve im Punkte M eingehe, muß der Gleichung dieses Kreises, ihrer Differentialgleichung der ersten Ordnung, und ihrer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, nämlich

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

durch die Werthe von x', y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, welche dem Punkte M dieser Curve angehören, Genüge geschehen. Man hat also jetzt die drei Gleichungen

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 = \varrho^2.$$
$$\alpha - x' + (\beta - y')\frac{dy'}{dx'} = 0$$
$$1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 - (\beta - y')\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

durch welche die Werthe der Constanten α, β und ϱ vollständig bestimmt sind.

Man findet

$$\alpha - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \quad \beta - y' = \frac{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Diese drei Ausdrücke dienen zur Festlegung des osculatorischen Kreises, indem sie sowol die Lage seines Mittelpunkts als auch die Größe seines Halbmessers erkennen lassen. Was das Vorzeichen des Werthes von ϱ betrifft, so muß dasselbe unbestimmt bleiben, da die Wurzelgröße $\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ eben sowol positiv wie negativ genommen werden kann; aber es verhält sich nicht ebenso mit den Werthen der Größen $\alpha - x'$ und $\beta - y'$, welche die Projectionen jenes Halbmessers auf den Achsen der x und der y darstellen. Das Vorzeichen dieser Größen zeigt an, nach welcher Seite der Curve der Mittelpunkt des osculatorischen Kreises auf der Normale angenommen werden muß; und man erkennt leicht, daß dieser Mittelpunkt sich stets, wie es auch sein muß, auf der concaven Seite der Curve befindet.

§. 181. Der so eben näher bestimmte Kreis wird gewöhnlicher der Krümmungskreis, und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser der Curve genannt, weil er das Maß für die Krümmung abgibt, welche die Curve in dem zur Betrachtung gezogenen Punkte besitzt. Will man sich nämlich von dem, was Krümmung heißt, einen Begriff machen, so bewege man sich von dem Berührungspunkte M aus auf der Curve fort bis zu einem benachbarten Punkte N, und vergleiche den Abstand NT dieses Punktes von der Tangente des Ausgangspunktes mit dem Wege MN, den man in der Curve zurückgelegt hat. Diejenige Gränze, welcher der Werth des Verhältnisses $\frac{NT}{MN}$ immer näher kommt, während die Entfernung MN immer

näher gleich Null wird, ist das Maß für die Krümmung der Curve im Punkte M.*) In dem Kreise ist die Krümmung in allen Punkten dieselbe, und überdies steht sie bei verschiedenen Kreisen im umgekehrten Verhältnisse ihrer Halbmesser. Denn es sei $MN = \sigma$ in einem Kreise, dessen Halbmesser R ist, so hat man $NT = R\left(1 - \cos\frac{\sigma}{R}\right)$, und

$$\frac{NT}{MN} = \frac{1 - \cos\frac{\sigma}{R}}{\frac{\sigma}{R}},$$ welche Größe, wenn σ abnimmt, immer

*) Eine vielleicht noch natürlichere Definition der Krümmung einer Curve ergibt sich, wenn man statt des obigen Abstandes NT den Winkel an die Stelle setzt, welchen die übereinstimmend gerichteten Theile der Tangenten der Punkte M und N der gegebenen Curve mit einander einschließen. Die Krümmung einer Curve in einem gegebenen Punkte M ist demnach gleich der Gränze des Verhältnisses, welches zwischen diesem Winkel und der Bogenlänge MN stattfindet, während die Entfernung MN immer näher gleich Null wird; oder die Krümmung wird in der weiter unten folgenden Bezeichnung ausgedrückt durch den Quotienten $\frac{d\tau}{ds}$. Daraus folgt sogleich weiter:

1) Für den Kreis findet sich $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho}$, wenn ϱ den Halbmesser des Kreises bezeichnet; also die Krümmung eines Kreises ist constant und für alle Punkte seiner Peripherie dieselbe.

2) Wenn man für einen beliebigen Punkt einer gegebenen Curve den Werth von $\frac{d\tau}{ds}$ entwickelt und ihn gleich $\frac{1}{\varrho}$ setzt, so stellt der aus dieser Gleichung entspringende Werth von ϱ den Halbmesser eines Kreises dar, welcher in allen seinen Punkten dieselbe Krümmung zeigt wie die gegebene Curve in dem angenommenen Punkte. Dieser Werth von ϱ stimmt aber, wie die folgende Entwickelung zeigt, genau mit dem oben gefundenen Werthe von ϱ überein.

näher mit $\frac{\sigma}{2R}$ zusammenfällt. Da nun der Krümmungskreis in der Nähe des Berührungspunktes sich weniger als jeder andere Kreis von der gegebenen Curve entfernt, so betrachtet man die Krümmung des Krümmungskreises in diesem Punkte als identisch mit der Krümmung der Curve, welche demnach in jedem ihrer Punkte proportional dem Bruche $\frac{1}{\varrho}$ ist, wenn man wie oben mit ϱ den Halbmesser des Krümmungskreises bezeichnet.

Der Auffassung des osculatorischen Kreises als Krümmungskreis liegt hiernach die Voraussetzung zum Grunde, daß man in einer unendlich kleinen Ausdehnung, nach der einen und der andern Seite des Berührungspunktes den Kreis für die Curve nehmen dürfe und umgekehrt. Diese Voraussetzung reicht aber allein schon hin, um auch direct und ohne die vorausgegangenen Untersuchungen zu den früheren Resultaten zu gelangen. Es sei nämlich s der Bogen der Curve bis zu demjenigen Punkte, dessen Abscisse x ist, und τ der Winkel zwischen der Achse der x und der Tangente der Curve in dem nämlichen Punkte. Die Größen s und τ werden sodann wie Functionen von x angesehen werden müssen, so daß, wenn x um dx zunimmt, gleichzeitig s und ds, und τ um $d\tau$ wachsen muß. Das Differential $d\tau$ bedeutet den Winkel zwischen den Tangenten an denjenigen beiden Punkten der Curve, welche den Abscissen x und $x + dx$ entsprechen, oder, wenn man will, den Winkel zwischen den Normalen an denselben beiden Punkten. Wenn man nun den Bogen ds so ansieht, als ob er dem Krümmungskreise angehöre, dessen Halbmesser ϱ ist, so hat man

$$ds = \varrho \, . \, d\tau,$$

d. h.

$$dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\varrho\,.\,d\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\varrho\,\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

woraus man erhält, wie oben

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Aus der also bestimmten Länge des Krümmungshalbmessers ergibt sich nun von selbst die Lage des Mittelpunkts des Krümmungskreises, weil man weiß, daß der Krümmungshalbmesser in die Richtung der Normale fällt, und zwar nach derjenigen Seite, welcher die Curve ihre Concavität zuwendet.

Zu größerer Einfachheit sind hier die Accente an den Buchstaben x und y weggeblieben. Man darf jedoch nicht vergessen, daß diese Buchstaben die Coordinaten desjenigen Punkts bezeichnen, in welchem die gegebene Curve von dem Krümmungskreise berührt wird.

§. 182. Der Winkel $d\tau$ zwischen den beiden Tangenten oder Normalen, welche den Endpunkten des unendlich kleinen Bogens ds einer Curve zugehören, wird der Contingenzwinkel genannt. Da aus der vorigen Gleichung folgt

$$\varrho=\frac{ds}{d\tau},$$

so erkennt man, daß der Krümmungshalbmesser stets gleich ist dem Element des Bogens dividirt durch den Contingenzwinkel.

§. 183. Wenn man annimmt, wie es im §. 171 geschah, daß die Gleichung der Curve in der Form

$$F(x,\,y)=0$$

gegeben sei, so hat man nach §. 72

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^3}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für α, β und ϱ in §. 180, so kommt

$$\alpha - x = -\frac{\frac{dF}{dx}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2}},$$

$$\beta - y = -\frac{\frac{dF}{dy}\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2}},$$

$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\frac{d^2F}{dx^2} - 2\frac{dF}{dx}\frac{dF}{dy}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \left(\frac{dF}{dx}\right)^2\frac{d^2F}{dy^2}},$$

§. 184. Bis hieher wurde fortwährend die Abscisse x als die unabhängige Veränderliche angesehen. Man kann indessen auch die beiden Coordinaten x und y gleichmäßig als Functionen von irgend einer dritten Veränderlichen betrachten, welche sodann die unabhängige Veränderliche sein wird. In diesem Falle sind die Gleichung des Kreises und ihre beiden Differentialgleichungen der ersten und der zweiten Ordnung

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = \varrho^2$$

$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy = 0$$

$$dx^2 + dy^2 - (\alpha - x)\,d^2x - (\beta - y)\,d^2y = 0,$$

und folglich findet man, wenn man mit ds das Element der Curve, $\sqrt{dx^2+dy^2}$, bezeichnet

$$\alpha - x = -\frac{dy\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},\quad \beta - y = \frac{dx\,ds^2}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Man würde zu denselben Resultaten gelangt sein, wenn man in die Ausdrücke des §. 180 unmittelbar die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ hineingesetzt hätte, welche im IX. Abschnitt für die Vertauschung der Veränderlichen angegeben worden sind. Uebrigens sind diese Resultate sofort und ohne Aenderung für den Fall richtig, wo man den Bogen s als unabhängige Veränderliche, und mithin sein Differential ds als constant ansieht.

Man kann diesen Resultaten eine andere Gestalt geben, wenn man beachtet, daß

$$(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = ds^2\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2] - (dx d^2x + dy d^2y)^2$$
$$= ds^2\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2],$$

und ebenso daß

$$-dy\,(dx\,d^2y - dy d^2x) = ds(ds d^2x - dx d^2s) = ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$dx\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = ds\,(ds d^2y - dy d^2s) = ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Alsdann erhält man

$$\alpha - x = \frac{ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2},\quad \beta - y = \frac{ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2},$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2-(d^2s)^2}}.$$

Wenn man mit λ und μ die beiden Winkel bezeichnet, welche derjenige Theil der Normale, auf welchem der Krümmungshalbmesser ϱ liegt, mit den Achsen der x und der y

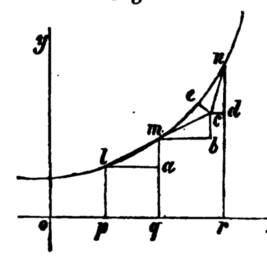
einschließt, so hat man vermöge der so eben gefundenen Ausdrücke

$$\cos\lambda = \frac{\varrho}{ds}\cdot d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ \cos\mu = \frac{\varrho}{ds}\cdot d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

Wird der Bogen s als unabhängige Veränderliche angesehen, so setzt man $d^2s = 0$, und statt $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$ und $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$ schreibt man $\frac{d^2x}{ds}$ und $\frac{d^2y}{ds}$.

§. 185. Die gewonnenen Resultate werden sehr anschaulich, wenn man die Curve wie die Gränze eines Polygons ansieht, dessen Seitenzahl mehr und mehr zunimmt. Es seien l, m, n, Fig. 34, drei Punkte der gegebenen Curve, deren Abscissen op, oq, or sind x, $x+dx$, $x+dx+d(x+dx)$ oder $x+2dx+d^2x$. Verlängert man den Bogen lm, der wie eine gerade Linie angesehen wird, bildet das Dreieck mbc congruent dem Dreiecke lam, zieht cn, und legt cd und ce rechtwinklig zu nr und mn, welche letztere gleichfalls wie eine gerade Linie angesehen wird, so erkennt man leicht, daß cd bedeutet d^2x, nd bedeutet d^2y, und ne bedeutet d^2s. Nun ist $nc = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}$, also $ce = \sqrt{(dx)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}$. Aber $\frac{ce}{cm}$ ist der Contingenzwinkel d. h. gleich $\frac{ds}{\varrho}$, folglich hat man

Fig. 34.



$$\frac{ds}{\varrho} = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}{ds}.$$

Ferner bedeutet $\frac{dx}{ds}$ den Cosinus des Winkeln alm, welchen die Tangente im Punkte l mit der Achse der x ein-

schließt. Wenn man aber vom Punkte l zum Punkte m übergeht, so ändert sich dieser Cosinus um eine Größe, welche der Projection von ce auf mb, nämlich $ce \cos\lambda$, proportional ist. Folglich hat man $\frac{ce}{cm}\cos\lambda = d\left(\frac{dx}{ds}\right)$. Ebenso wird $\frac{ce}{cm}\cos\mu = d\left(\frac{dy}{ds}\right)$. Man findet also

$$\cos\lambda = \frac{ds \,.\, d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}, \quad \cos\mu = \frac{ds \,.\, d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}},$$

welche Ausdrücke mit den früheren übereinstimmen.

Evoluten.

§. 186. Es sei wie früher

$$y = f(x) \qquad \text{(A)}$$

die Gleichung einer gegebenen Curve. Nach §. 180 hat man zur Bestimmung des Krümmungskreises in demjenigen Punkte der Curve, dessen Coordinaten x und y sind, die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 &= \varrho^2 \\ \alpha - x + (\beta - y)\frac{dy}{dx} &= 0 \qquad \text{(B)} \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2} &= 0, \end{aligned}$$

in denen α und β die Coordinaten des Mittelpunkts und ϱ den Halbmesser des Krümmungskreises bedeuten. Die Werthe von α und β, welche sich aus diesen Gleichungen ergeben, sind nach §. 180

$$\alpha = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \beta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad \text{(C)}$$

Setzt man hierin für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ihre Werthe aus der Glei-

chung (A) der gegebenen Curve, so erhält man diese Coordinaten ausgedrückt durch die Abscisse x, und damit die Lage des Mittelpunkts der Krümmung für jeden beliebigen Punkt der Curve.

Läßt man nun x sich ändern, um von Punkt zu Punkt der gegebenen Curve überzugehen, so ändert sich gleichfalls die Lage des Mittelpunkts der Krümmung. Die Reihefolge dieser Lagen bildet eine Curve, von welcher α und β, als Veränderliche betrachtet, die Coordinaten abgeben, und deren Gleichung man augenscheinlich findet, wenn man x aus den beiden Gleichungen (C) eliminirt. Denn diese Ausdrücke gelten für jeden der Krümmungsmittelpunkte, welche durch angenommene Werthe der Veränderlichen x bestimmt werden; läßt man also diese Veränderliche durch Elimination verschwinden, so bleibt eine Relation übrig, welche für sämmtliche Krümmungsmittelpunkte gilt, d. h. für die Curve, die der geometrische Ort derselben ist. Diese Curve wird nach Huygens die Evolute der gegebenen Curve genannt, deren Gleichung ist $y = f(x)$.

§. 187. Die Gleichungen (B) gehören offenbar der Evolute an, wenn man darin α, β und ϱ wie Veränderliche und wie Functionen von x ansieht. In gleicher Weise gehören ihr also auch die Differentiale dieser Gleichungen an. Wenn man nun die erste Gleichung in (B) differentiirt und diejenigen Glieder wegläßt, welche vermöge der zweiten gleich Null sind, so hat man

$$(\alpha - x)\, d\alpha + (\beta - y)\, d\beta = \varrho d\varrho. \qquad \text{(D)}$$

Differentiirt man ebenso die zweite Gleichung in (B) und läßt diejenigen Glieder weg, welche vermöge der dritten gleich Null sind, so hat man

$$dx\, d\alpha + dy\, d\beta = 0. \qquad \text{(E)}$$

Die Gleichung (E), welche man auch schreiben kann.

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

sagt aus, daß die Tangenten an je zwei einander entsprechenden Punkten einer Curve und ihrer Evolute stets rechtwinklig auf einander stehen. Der Krümmungshalbmesser berührt also beständig die Evolute.

Die Gleichung (D) läßt sich auf die Form bringen

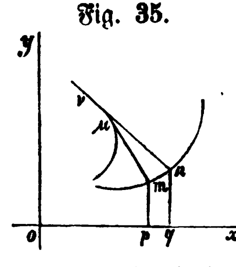
$$\frac{\alpha - x}{\varrho} d\alpha + \frac{\beta - y}{\varrho} d\beta = d\varrho.$$

Nun sind $\frac{\alpha - x}{\varrho}$ und $\frac{\beta - y}{\varrho}$ resp. die Cosinus der Winkel, welche der Halbmesser ϱ, der zugleich Tangente der Evolute ist, mit den Achsen der x und der y einschließt. Also bedeutet die linke Seite der letzteren Gleichung die Summe der Projectionen der Elemente $d\alpha$ und $d\beta$ auf die Tangente der Evolute, d. h. die Länge des Bogenelements der Evolute, dessen Projectionen auf die Achsen der x und der y resp. $d\alpha$ und $d\beta$ sind. Bezeichnet man dieses Bogenelement mit $d\sigma$, wo mithin $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$ ist, so hat man also

$$d\sigma = d\varrho.$$

Man erkennt also, daß wenn man in der gegebenen Curve vom Punkte m, Fig. 35, dessen Abscisse $op = x$ ist, zu dem Punkte n übergeht, dessen Abscisse $oq = x + dx$ ist, und folglich gleichzeitig vom Punkte μ der Evolute zu dem Punkte ν derselben, sodann der Bogen $\mu\nu$ zwischen diesen beiden Punkten gleich ist dem Unterschiede der beiden Krümmungshalbmesser $m\mu$ und $n\nu$.

Fig. 35.



Hieraus schließt man, daß man sich die Curve mn in continuirlicher Bewegung durch den Endpunkt eines gespannten Fadens

beschrieben denken kann, welcher auf der Curve $\mu\nu$ aufgewickelt war und von derselben nach und nach abgewickelt wird. Aus diesem Grunde hat die Curve $\mu\nu$ den Namen der Evolute der Curve mn erhalten. Umgekehrt nennt man die Curve mn die Evolvente der Curve $\mu\nu$. Die Betrachtung der Evoluten ist von großer Bedeutung bei mehreren wichtigen Anwendungen der Mathematik.

§. 188. **Wenn die Gleichung der Curve in der Gestalt**

$$F(x, y) = 0$$

gegeben wäre, so würde man nur nöthig haben, statt der Gleichungen (C), aus denen x eliminirt werden muß, um die Gleichung der Evolute zu erhalten, die Ausdrücke für α und β aus §. 183 an die Stelle zu setzen. Man eliminirt sodann x und y aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung $F(x, y) = 0$ der gegebenen Curve.

Beispiele.

§. 189. Es sei erstens die Gleichung der Ellipse gegeben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Man hat $F(x, g) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $\frac{dF}{dx} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{dF}{dy} = \frac{2y}{b^2}$, $\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{2}{a^2}$, $\frac{d^2F}{dx\,dy} = 0$, $\frac{d^2F}{dy^2} = \frac{2}{b^2}$, und durch Substitution in den Ausdruck des §. 183 für ϱ kommt

$$\varrho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

als Ausdruck für den Krümmungshalbmesser dieser Curve.

Substituirt man die vorstehenden Ausdrücke in die Werthe des nämlichen Paragraphen für α und β, so erhält man

$$\alpha = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3,\quad \beta = \frac{b^2-a^2}{b^4}y^3;$$

und die hieraus gewonnenen Werthe von x und y geben, in die Gleichung der Curve gesetzt,

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Evolute der Ellipse. Diese Curve besteht aus vier congruenten Theilen, welche in Bezug auf die Achsen der Ellipse symmetrisch liegen. Die Krümmungshalbmesser, welche den Scheiteln zugehören, sind $\frac{b^2}{a}$ im Endpunkte der großen Achse und $\frac{a^2}{b}$ in Endpunkte der kleinen Achse. Die Evolute wird von beiden Achsen berührt.

Die Gleichung der Hyperbel geht aus derjenigen der Ellipse hervor, wenn man das Vorzeichen von b^2 verändert. Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser bleibt derselbe, aber die Gleichung der Evolute wird

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2+b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Die Curve ist, wie die vorige, aus vier congruenten Theilen zusammengesetzt, welche in Bezug auf die Achsen der Hyperbel symmetrisch liegen. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Hyperbel hat den Werth $\frac{b^2}{a}$. Die Evolute wird von der Achse der x berührt.

§. 190. Die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

gibt $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{p}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$, und durch Substitution in den Ausdruck des §. 180 für ϱ kommt

$$\varrho = \frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

dieselben Werthe geben, in die Ausdrücke desselben Paragraphen für α und β gesetzt,

$$\alpha = p + 3x, \quad \beta = \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}};$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x eliminirt, so erhält man als Gleichung der Evolute der Parabel

$$\beta^2 = \frac{8}{27} \frac{(\alpha - p)^3}{p}.$$

Diese Curve besteht aus zwei congruenten Theilen, welche in Bezug auf die Achse der x symmetrisch liegen und von dieser Achse berührt werden. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Parabel ist gleich p.

§. 191. Für die **Cycloide** wurde bereits im §. 178 gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R}{y} - 1}, \text{ woraus } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{R}{y^2}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{2R}{y} - 1}} = -\frac{R}{y^2}.$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck des §. 180 für ϱ, so kommt

$$\varrho = -2\sqrt{2Ry},$$

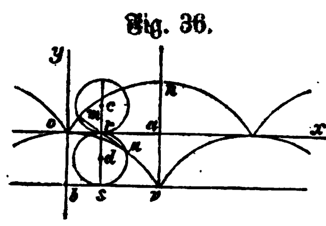
woraus man vermöge der Formeln des §. 178 schließt, daß der Krümmungshalbmesser immer das Doppelte der Normale beträgt.

Substituirt man ferner die vorstehenden Werthe in die Ausdrücke des §. 180 für α und β, so erhält man

$$\alpha = x + 2\sqrt{2Ry - y^2}, \quad \beta = -y.$$

Sowol aus diesen Ausdrücken, als auch aus demjenigen für den Krümmungshalbmesser ϱ geht hervor, daß der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel n der Cycloide, Fig. 36,

Fig. 36.



sich in v befindet, indem man $av = an$ nimmt. Um die Gleichung der Evolute in ihrer einfachsten Gestalt zu erhalten, beziehe man dieselbe auf zwei neue Coordinaten α' und β', welche von dem Punkte v aus, als Anfangspunkt, und den ursprünglichen Coordinaten parallel, in dem Sinne vb und dem Sinne va gerichtet sind. Man hat also zu setzen

$$\alpha = \pi R - \alpha' \quad \beta = -2R + \beta',$$

wodurch die vorigen Gleichungen sich verwandeln in

$$\alpha' = \pi R - x - 2\sqrt{2Ry - y^2}, \quad \beta' = 2R - y.$$

Hieraus erhät man mit Rücksicht auf den Ausdruck von x durch y, in §. 178,

$$\alpha' = R\left(\pi - \text{arc}\cos\frac{R-y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2},$$

und endlich, indem man y eliminirt

$$\alpha' = R\,\text{arc}\cos\frac{R-\beta'}{R} - \sqrt{2R\beta' - \beta'^2}.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Gleichung der Cycloide, §. 178, geht hervor, daß die Evolute der Cycloide wieder eine Cycloide ist, congruent der gegebenen.

Dieses Ergebniß läßt sich auch schon aus dem obigen Werthe für den Krümmungshalbmesser erkennen. Da nämlich der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt m der Cycloide sich in der Verlängerung der Normale befinden muß, und zwar in einem Abstande $r\mu = rm$, so folgt, daß der Bogen $r\mu$ des Kreises, dessen Halbmesser gleich R und dessen Mittelpunkt in d ist, gleich dem Bogen rm des Kreises von gleichem Halbmesser sein muß, dessen Mittelpunkt in c

liegt. Aber der Bogen *rm* ist gleich der Geraden *or*; folglich ist der Bogen $s\mu$ gleich der Geraden *vs*.

Der Krümmungshalbmesser ist Null im Punkte *o* der Cycloide *omn*. Folglich ist der Bogen $o\mu$ der Evolute gleich dem Krümmungshalbmesser $m\mu$. Die Bogenlänge der halben Cycloide *omn* beträgt also $4R$; und allgemein, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten *x* und *y* in den Scheitel *n* der Curve verlegt und den Bogen *s* von dem nämlichen Punkte aus rechnet, so hat man immer

$$s = 2\sqrt{2Ry}.$$

Die merkwürdige Eigenschaft der Cycloide, sie durch die Abwickelung selbst wieder zu erzeugen, steht in Verbindung mit dem folgenden von Johann Bernoulli entdeckten allgemeineren Satze: Wenn man von einer beliebigen Curve, deren Endpunkte zwei Seiten eines Rechtecks zu Tangenten haben, die Evolute sucht, von dieser wieder die Evolute, und so fort bis ins Unendliche, so werden die auf solche Weise erhaltenen Curven immer mehr mit einer halben Cycloide zusammenfallen.

XIX. Ebene Curven in Bezug auf Polarcoordinaten.

---

§. 192. Unter Polarcoordinaten versteht man die schon im §. 79 zur Sprache gebrachten und in vielen Fällen statt der rechtwinkligen Coordinaten *x* und *y* zur Festlegung eines Punktes dienenden Größen, nämlich den Radiusvector *r*, und den Winkel ω, welchen derselbe mit der Achse der *x* einschließt. Diese neuen Coordinaten sind,

wie daselbst angegeben, an die ersteren durch die Relationen gebunden

$$x = r \cos \omega, \quad \text{woraus } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \sin \omega, \quad \omega = \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Der Radiusvector r wird immer positiv genommen. Der Winkel ω dagegen kann alle positiven und negativen Werthe von Null bis ins Unendliche annehmen.

§. 193. Die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen Punkt geht, dessen rechtwinkelige Coordinaten sind x' und y', und mit der Achse der x einen Winkel τ einschließt, ist für rechtwinklige Coordinaten

$$y - y' = \text{tang}\, \tau \,.\, (x - x').$$

Die Gleichung derselben geraden Linie für Polarcoordinaten wird mit Hülfe der vorigen Formeln

$$r \sin (\omega - \tau) = r' \sin (\omega' - \tau),$$

wo r' und ω' diejenigen Werthe von r und ω bedeuten, welche dem Punkte zugehören, dessen Coordinaten x' und y' sind. Augenscheinlich ist $r \sin (\omega - \tau)$ die constante Entfernung der in Rede stehenden Linie von einer mit ihr durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Parallelen.

§. 194. Die Gleichung der Parabel ist, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel legt, für rechtwinklige Coordinaten

$$y^2 = 2px;$$

dagegen für Polarcoordinaten

$$r = 2p \frac{\cos \omega}{\sin \omega^2}.$$

§. 195. Die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel für rechtwinklige Coordinaten, wenn der Anfangspunkt im Mittelpunkt liegt, ist

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

und für Polarcoordinaten

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos \omega^2 \pm a^2 \sin \omega^2}.$$

§. 196. Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Brennpunkt der Parabel verlegt, indem man in der Gleichung $y^2 = 2px$ für x an die Stelle setzt $\frac{p}{2} + x$, so wird die Gleichung der Curve

$$y^2 = p(p + 2x),$$

oder wenn man $\frac{p}{2} = r'$ setzt, wo r' den Abstand des Scheitels vom Brennpunkt bedeutet,

$$y^2 = 4r'(r' + x).$$

Substituirt man hierin die Werthe von x und y aus §. 192, so erhält man die Gleichung für Polarcoordinaten

$$r = \frac{2r'}{1 - \cos \omega},$$

und wenn man, was gebräuchlicher ist, den Winkel ω von demjenigen Theile der Achse aus zählt, welcher auf der Seite der negativen x liegt, d. i. von dem Theile der Achse zwischen Brennpunkt und Scheitel der Curve, so hat man

$$r = \frac{2r'}{1 + \cos \omega}.$$

Diese Gleichung läßt sich auch leicht unmittelbar aus den bekannten Eigenschaften der Parabel herleiten.

§. 197. Es bezeichne e die Excentricität der Ellipse und der Hyperbel, d. i. das Verhältniß des Abstandes zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt zu der halben großen Achse. Man hat sodann $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$ für die Ellipse, und $ae = \sqrt{a^2 + b^2}$ für die Hyperbel. Verlegt man nun in der Ellipse den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Brennpunkt, welcher auf der Seite der positiven x liegt, und in der Hyperbel in denjenigen Brennpunkt, wel=

cher auf der Seite der negativen x liegt, so wird die Abscisse aus dem Mittelpunkte in der ersteren Curve durch $x + ae$, in der letzteren Curve durch $x - ae$ ausgedrückt werden. Die Gleichungen beider Curven werden also resp.

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1 \text{ und } \frac{(x-ae^2)}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1;$$

und durch Substitution der Werthe von x und y aus §. 192 wird die Gleichung der Ellipse für Polarcoordinaten

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega},$$

und die Gleichung der Hyperbel für Polarcoordinaten

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\omega} \text{ oder } r = \frac{a(e^2-1)}{e\cos\omega - 1},$$

je nachdem man den näheren oder den entfernteren Arm der Curve in Bezug auf denjenigen Brennpunkt, welcher als Anfangspunkt angenommen worden ist, betrachtet. Diese Gleichungen lassen sich gleichfalls auch aus den bekannten Eigenschaften der in Rede stehenden Curve herleiten.

Wenn man statt der großen Achse $2a$ den Parameter $2p$ einführt, wo $b^2 = ap$ ist, so erkennt man überdies leicht, daß die Gleichung

$$r = \frac{p}{1+e\cos\omega}$$

eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel darstellt, je nachdem $e < 1$, $= 1$ oder > 1 ist. Im letztern Falle liefert sie jedoch nur den näher liegenden Arm der Hyperbel, gemäß dem vorhin Gesagten.

§. 198. Die allgemeinen Differentialausdrücke für die Richtung der Tangente einer Curve, ihren Flächeninhalt, und die Länge ihres Bogens, gestalten sich beim Gebrauche der Polarcoordinaten wie folgt.

Die Gleichung der gegebenen Curve sei

$$r = f(\omega).$$

Sucht man die Richtung der Curve in einem Punkte, dessen Coordinaten r und ω sind, so hat man nur zu bemerken, daß die gerade Linie, welche den Winkel τ mit derjenigen Achse einschließt, von welcher aus der Winkel ω gerechnet wird, und deren Gleichung

$$r = r' \frac{\sin(\omega' - \tau)}{\sin(\omega - \tau)}$$

in §. 193 aufgestellt worden ist, gemäß den Entwickelungen des XVI. Abschnitts eine Tangente der Curve in dem in Rede stehenden Punkte sein wird, wenn der Werth von $\frac{dr}{d\omega}$, welchen die Gleichung der geraden Linie für diesen Punkt giebt, gleich ist dem Werthe des nämlichen Differentialverhältnisses aus der Gleichung der Curve. Nun ergiebt die Differentiation des vorstehenden Werthes von r

$$\frac{dr}{d\omega} = -r' \frac{\sin(\omega' - \tau)\cos(\omega - \tau)}{\sin(\omega - \tau)^2},$$

oder weil für den in Rede stehenden Punkt $r' = r$ und $\omega' = \omega$ ist,

$$\frac{dr}{d\omega} = -r \cot(\omega - \tau).$$

Folglich wird der Winkel τ, den die Tangente der Curve mit derjenigen Achse einschließt, von welcher aus der Winkel ω gerechnet wird, allgemein bestimmt durch die Gleichung

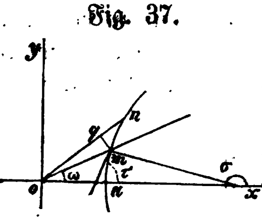
$$\cot(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega},$$

wenn darin $\frac{dr}{d\omega}$ das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von der Function $r = f(\omega)$ bedeutet. Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß $\tau - \omega$ selbst den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente der Curve mit dem Radiusvector einschließt.

Zu demselben Ergebniß kann man auch auf geometri=

schen Wege leicht gelangen. Es seien m und n, Fig. 37, die beiden Punkte der Curve, welche den Werthen ω und $\omega + d\omega$ der Neigung des Radiusvectors entsprechen. Der Bogen mq, welcher aus dem Punkte o mit dem Halbmesser $om = r$ beschrieben ist, hat die Länge $rd\omega$, und nq stellt dr dar. Nun kann man, bei Betrachtung der Gränze, mq wie eine gerade Linie ansehen, welche auf om rechtwinklig steht, und die Curve in dem Intervalle mn wie zusammenfallend mit der Tangente. Bemerkt man sodann, daß der Winkel nmq das Complement des Winkels $\tau - \omega$ ist, so hat man wie oben

Fig. 37.



$$\cot(\tau - \omega) = \frac{dr}{rd\omega}.$$

Nennt man σ den Winkel, welchen die Normale der Curve im Punkte m mit der Achse der x einschließt, so hat man vermöge der vorigen Formel

$$\cot(\sigma - \omega) = -\frac{rd\omega}{dr},$$

wo $\sigma - \omega$ den Winkel zwischen der Normale und dem Radiusvector bedeutet.

§. 199. Unter der Fläche einer Curve versteht man beim Gebrauche der Polarcoordinaten den dreiseitigen Raum, welcher von der Curve, einem festen Radiusvector (z. B. dem mit der Achse zusammenfallen oa, Fig. 37) und dem beweglichen Radiusvector om begränzt wird. Diese Fläche mag mit u bezeichnet werden. Wenn ω um $d\omega$ zunimmt, so wächst u um das Dreieck omn, dessen Fläche, indem man mn wie geradlinig ansieht, ausgedrückt wird durch

$$\frac{1}{2} r (r + dr) d\omega.$$

Wenn man hierin, wie es bei dem Uebergange zur Gränze stets geschehen muß, die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung vernachlässigt, so hat man

$$du = \frac{1}{2}\, r^2 d\omega.$$

§. 200. Was das Differential des Bogens der Curve betrifft, welcher wie früher durch s bezeichnet werden mag, so kann man das Element mn, Fig. 37, bei Betrachtung der Gränze, wie die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mnq ansehen, dessen Katheten sind $rd\omega$ und dr. Man findet also

$$ds = d\omega \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

Dabei wird die Voraussetzung gemacht, daß der Bogen s zugleich mit dem Winkel ω zunehme.

§. 201. Will man den allgemeinen Ausdruck des Krümmungshalbmessers für Polarcoordinaten haben, so kann man auf die Formel des §. 182 zurückgehen

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Aus der Gleichung des §. 198

$$\cot(\tau - \omega) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}$$

erhält man durch Differentiation, indem τ und r als Functionen von ω angesehen werden,

$$-\frac{\frac{d\tau}{d\omega} - 1}{\sin(\tau - \omega)^2} = -\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2};$$

und da dieselbe Gleichung giebt

$$\sin(\tau - \omega)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2},$$

so wird

$$\frac{d\tau}{d\omega} = \frac{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist aber

$$\frac{ds}{d\omega} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mithin endlich

$$\varrho = \frac{r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\omega^2}} \text{ oder } = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\omega^2}}.$$

Da die Richtung der Normale nach §. 198 bekannt ist, so reicht dieser Ausdruck für den Krümmungshalbmesser hin, um die Lage des Mittelpunkts der Krümmung festzustellen.

Die Wurzel $\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ kann nach Gefallen mit dem Vorzeichen + oder − genommen werden. Will man das Zeichen + beibehalten, so folgt, daß der Krümmungshalbmesser als positiv angesehen wird, wenn die Differentiale $d\tau$ und ds einerlei Vorzeichen haben, dagegen als negativ wenn dieselben verschiedene Vorzeichen besitzen. Nun wird hier die Voraussetzung gemacht, daß der Bogen s in gleichem Sinne wie der Winkel ω zunehme; folglich gilt der Krümmungshalbmesser als positiv, wenn die Concavität der Curve nach dem Anfangspunkte der Coordinaten hingewandt ist, und als negativ im entgegengesetzten Falle.

Spiralen.

§. 202. Mit dem Namen Spiralen bezeichnet man gewisse Curven, deren Natur und Eigenschaften auf einfachere Weise mit Hülfe der Polarcoordinaten ausgedrückt werden können.

Die Archimedische Spirale hat die Gleichung

$$r = a\omega,$$

wo a eine positive Constante bezeichnet. Die Curve beginnt im Anfangspunkte oder Pol, und bildet eine unendliche Anzahl von Windungen um diesen Punkt, von welchem sie sich mehr und mehr entfernt.

§. 203. Die hyperbolische Spirale hat ihren Namen von der Analogie ihrer Gleichung

$$r = \frac{a}{\omega},$$

wo a eine positive Constante bezeichnet, mit der Gleichung der Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten. Die Curve beginnt in einer unendlichen Entfernung vom Pol, wo sie eine Parallele zur Achse der x berührt, deren Gleichung ist $y = a$; denn die vorstehende Gleichung kann auch geschrieben werden $y = a\frac{\sin\omega}{\omega}$, und gibt $y = a$ für $\omega = 0$. Sie bildet eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol, dem sie sich fortwährend nähert, ohne ihn zu erreichen; nur für $\omega = \infty$ wird $r = 0$.

§. 204. Die logarithmische Spirale, eine bemerkenswerthe Curve, deren Eigenschaften durch Jakob Bernoulli untersucht worden sind, hat zur Gleichung

$$\omega = \log r, \quad \text{oder } r = a^{\omega}, \quad \text{oder } r = e^{la \cdot \omega},$$

wo a die Basis des logarithmischen Systems bezeichnet, welche größer als die Einheit vorausgesetzt werden mag. Der Werth von r, welcher dem Winkel $\omega = 0$ entspricht, ist $= 1$; folglich beginnt die Curve in einem Punkte A der Achse der x, dessen Abstand vom Pole gleich der Einheit ist. Wenn ω von Null aus positiv zunimmt, so wächst r ununterbrochen; die Curve bildet also vom Punkte A aus eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol, indem sie sich fortwährend von diesem Punkte entfernt. Wenn ω von Null aus negativ zunimmt, so wächst r un-

unterbrochen kleiner; die Curve bildet also gleichfalls vom Punkte A aus eine unendliche Anzahl von Windungen um den Pol, dem sie sich fortwährend nähert, ohne ihn zu erreichen.

Aus der Gleichung

$$r = e^{la \cdot \omega}$$

erhält man

$$\frac{dr}{d\omega} = la \cdot e^{la \cdot \omega}, \quad \frac{d^2r}{d\omega^2} = (la)^2 e^{la \cdot \omega}.$$

Die Formel des §. 198 für den Winkel $\tau - \omega$, welcher zwischen der Tangente und dem Radiusvector enthalten ist, giebt demnach

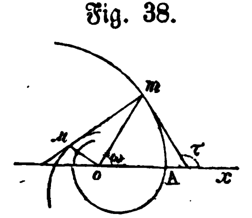
$$\cot(\tau - \omega) = la;$$

dieser Winkel hat mithin einen constanten Werth.

Ferner wird der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser nach §. 201

$$\varrho = r\sqrt{1 + (la)^2} = \frac{r}{\sin(\tau - \omega)}.$$

Fig. 38.



Ist also μ, Fig. 38, der Krümmungsmittelpunkt, welcher dem Punkte m der logarithmischen Spirale zugehört, so steht die Linie $o\mu$ rechtwinklig auf dem Radiusvector om. Ueberdies haben Radiusvector und Krümmungshalbmesser zu einander ein constantes Verhältniß.

Bezeichnet man mit R und Ω die Polarcoordinaten des Krümmungsmittelpunkts μ, also resp. die Länge $o\mu$ und den Winkel μox, so hat man nach dem Vorigen

$$R = \sqrt{\varrho^2 - r^2} = la \cdot r, \quad \Omega = \omega + \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man die Werthe von r und ω, welche aus diesen Gleichungen folgen, in die Gleichung $r = e^{la \cdot \omega}$ der Curve, so erhält man

$$R = la \,.\, e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)},$$

oder was auf dasselbe hinauskommt

$$R = e^{la\left(\Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{l\,.\,la}{la}\right)}$$

als Polargleichung der Evolute. Die Evolute der logarithmischen Spirale ist also diese nämliche Curve, welche um den Pol eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{l\,.\,la}{la}$ erlitten hat. Um zu erkennen, daß die Evolute wieder eine logarithmische Spirale ist, reicht es übrigens schon hin zu bemerken, daß ihre Tangente, welche nichts anderes ist als der Krümmungshalbmesser μm, mit ihrem Radiusvector $o\mu$ einen constanten Winkel bildet.

XX. Besondere Punkte der ebenen Curven.

---

§. 205. Die in den Abschnitten XVI. ff. entwickelten Begriffe, welche sich auf die Bestimmung der Tangenten ebener Curven, so wie der osculatorischen Kreise oder allgemein der osculatorischen Curven beziehen, beruhen auf dem Gebrauche des Taylor'schen Lehrsatzes, und enthalten im allgemeinen die Voraussetzung, daß die Differentialverhältnisse derjenigen Function, welche den Werth der Ordinate mit Hülfe der Abscisse ausdrückt, für den in Betracht kommenden Punkt der Curve endliche und bestimmte Werthe annehmen. Es ist also erforderlich, gemäß dem was im

X. Abschnitte aus einander gesetzt worden ist, daß die Curve in der Nähe solcher Punkte continuirlich sei; und überdies darf die Function für den in Rede stehenden Werth der Abscisse sich nicht in einem der Ausnahmefälle befinden, welche in demselben Abschnitte angegeben worden sind. Wo es sich anders verhält, da ist die Curve im allgemeinen von eigenthümlicher Beschaffenheit und besitzt dasjenige, was man einen besondern Punkt nennt.

In den meisten Fällen haftet die Existenz der besonderen Punkte daran, daß die Curve zwei oder mehrere Arme hat, welche sich in den fraglichen Punkten vereinigen. Indessen bieten auch Curven, welche nur einen einzigen Zug bilden oder aus mehreren von einander getrennt liegenden Zügen bestehen, zuweilen merkwürdige Punkte dar, welche man im weiteren Sinne gleichfalls unter der Benennung der besonderen Punkte begreift.

Es sei $y = f(x)$ die gegebene Gleichung einer Curve, und man habe von derselben die successiven Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, rc. gebildet.

Wenn das erste Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ für einen Werth $x = a$ der Abscisse zu Null wird, während alle übrigen Differentialverhältnisse endliche Werthe behalten, so ist die Tangente der Curve in dem entsprechenden Punkte parallel zur Achse der x; und die Ordinate ist, gemäß den Entwicklungen des XIV. Abschnitts, ein Maximum oder ein Minimum.

Wenn das zweite Differentialverhältniß $\frac{d^2y}{dx^2}$ allein zu Null wird, während alle übrigen endliche Werthe behalten, so ist der Krümmungshalbmesser unendlich groß, und der Sinn der Krümmung ändert sich. Man hat sodann einen Beugungspunkt (vergl. §. 65).

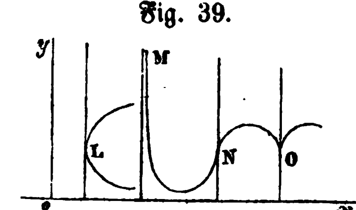
Wenn das Differentialverhältniß der dritten Ordnung $\frac{d^3y}{dx^3}$ allein zu Null wird, so muß $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein Maximum oder ein Minimum sein; aber davon kann man in der Regel in der Gestalt der Curve nichts weiter wahrnehmen.

Wenn die beiden ersten Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ zugleich zu Null werden, so tritt der am Schlusse des §. 145 bemerkte Fall ein, nämlich ein Beugungspunkt, in welchem zugleich die Tangente der Curve parallel zur Achse der x ist.

§. 206. Außer den Fällen, wo einzelne Differentialverhältnisse zu Null werden, sind zunächst diejenigen zu betrachten, wo dieselben unendlich große Werthe annehmen.

Wenn das Differentialverhältniß der ersten Ordnung $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß wird, so ist die Tangente der Curve parallel zur Achse der y. Dieses kann in vier Fällen eintreten: in dem Punkte L., Fig. 39, welcher im Sinne der x den Raum begränzt, den die Curve einnimmt; in M, wo die Ordinate unendlich groß ist, und die Curve von einer Parallelen zur Achse der y berührt wird; in N, wo ein Beugungspunkt stattfindet; und endlich in O, welcher Punkt ein Rückkehrpunkt genannt wird.

Fig. 39.



Wenn das Differentialverhältniß der zweiten Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}$ allein unendlich groß wird, so nimmt der Krümmungshalbmesser den Werth Null an.

§. 207. Sodann sind hier diejenigen Fälle in Be=

trachtung zu ziehen, wo eine Curve mehrere Arme besitzt, deren Vereinigung oder Durchkreuzung zu besondern Punkten Anlaß gibt. Diese Fälle entsprechen immer denen der §§. 90 rc. Eine Curve kann nämlich nur dann mehrere Arme haben, wenn die Function $y = f(x)$, welche die Ordinate darstellt, Wurzeln mit geraden Exponenten enthält, denen man also ein doppeltes Vorzeichen geben muß. Im allgemeinen entsprechen sodann jedem Werthe von x mehrere Werthe von y, und eben so viele Werthe für jedes Differentialverhältniß, und diese Werthe gehören resp. zu den verschiedenen Armen der Curve. Wenn aber der besondere Werth $x = a$ eine Wurzel in $f(x)$ zum Verschwinden bringt, und folglich die Werthe von y auf eine geringere Anzahl zurückführt, so vereinigen sich zwei oder mehrere Arme in dem entsprechenden Punkte, welcher deßhalb ein vielfacher Punkt genannt wird. Ueberdies ergab sich in den angeführten Paragraphen, daß es hier zwei Fälle zu unterscheiden gibt.

1) Wenn die Wurzel in $f(x)$ für den Werth $x = a$ deßhalb verschwindet, weil dieser Werth die Wurzel selbst zu Null macht, so kann die Entwickelung von $f(a+h)$ nur gebrochene Potenzen von h enthalten, und mithin müssen alle Differentialverhältnisse unendlich groß werden.

2) Wenn die Wurzel verschwindet, weil der Werth $x = a$ einen gewissen Factor zu Null macht, mit welchem diese Wurzel in $f(x)$ behaftet ist, so kann nach einer bestimmten Anzahl von Differentiationen die Wurzel in den Differentialverhältnissen wiedererscheinen, und die Taylor'sche Reihe bleibt anwendbar. Es können also nur die ersten Differentialverhältnisse, in denen dieser Factor noch vorkommt, für den Werth $x = a$ zu Null*) werden, während

*) Dieser Werth Null ist hier nur als ein besonderer Fall zu nehmen.

die Differentialverhältnisse der höheren Ordnungen, in denen die gedachte Wurzel wieder auftritt, endliche und von einander verschiedene Werthe annehmen müssen, welche resp. den verschiedenen Armen der Curve angehören.

Aus dem Gesagten erkennt man, daß ein vielfacher Punkt dadurch angezeigt werden kann, daß die Differentialverhältnisse der ersten Ordnung und der höheren Ordnungen unendlich große Werthe annehmen. Aber diese Anzeige ist nicht sicher, weil dasselbe auch in einem Beugungspunkte eintreten kann, in welchem die Tangente der Curve parallel zur Achse der y liegt.

Man erkennt ferner, daß ein vielfacher Punkt auch dadurch angezeigt werden kann, daß die ersten Differentialverhältnisse zu Null werden. Dieser Umstand kann gleichfalls in einem Beugungspunkte vorkommen, wo die Tangente der Curve parallel zur Achse der x liegt. Indessen wenn den ersten Differentialverhältnissen, welche Null werden, andere nachfolgen, welche Wurzeln in sich enthalten, so ist man sicher, daß der in Rede stehende Punkt durch die Vereinigung mehrerer Arme der Curve gebildet wird, welche mit einander eine Berührung eingehen, deren Ordnung durch die Anzahl der zugleich verschwindenden Differentialverhältnisse gegeben ist.

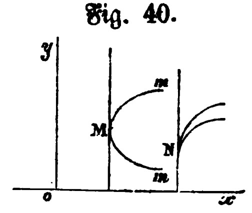
Im allgemeinen geben also die Werthe 0 oder ∞, welche die ersten Differentialverhältnisse annehmen, kein

Im allgemeinen nämlich werden die Function nebst den ersten Differentialverhältnissen derselben unter den angezeigten Umständen nicht nothwendig verschwinden, sondern nur eine geringere Anzahl von einander verschiedener Werthe annehmen, als die Curve Arme besitzt, z. B. einen einzigen. Man erkennt übrigens auch in diesem allgemeineren Falle ohne Mühe eine Berührung von höherer Ordnung, welche die verschiedenen Arme der Curve in dem in Rede stehenden Punkte mit einander eingehen.

sicheres Urtheil über die Natur des besonderen Punkts; vielmehr bedarf es immer noch einer Untersuchung über den Lauf der Curve in der Nähe dieses Punkts.

§. 208. Der einfachste Fall, auf welchen die vorstehenden Betrachtungen angewandt werden können, ist ein Punkt wie *M*, Fig. 40, welcher die Begränzung einer Curve im Sinne der *x* ausmacht. Man hat dabei die beiden Theile *Mm* und *Mm* wie zwei verschiedene Arme zu betrachten, welche sich in *M* vereinigen; mögen dieselben sonst sich ins Unendliche erstrecken oder zu einer geschlossenen Curve verbinden.

Fig. 40.



Die Differentialverhältnisse der ersten Ordnung und der höheren Ordnungen sind für den Werth der Abscisse, welcher einem solchen Punkte entspricht, unendlich groß. Dasselbe tritt ein, wenn die Begränzung der Curve durch einen Rückkehrpunkt *N* gebildet wird.

Man kann bemerken, daß der Punkt *N*, Fig. 40, in welchem die beiden Arme der Curve auf einerlei Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen, ein Rückkehrpunkt der zweiten Art heißt; dagegen der Punkt *O*, Fig. 39, wo die beiden Arme der Curve auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Tangente liegen, ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

Der Fall, wo alle Differentialverhältnisse unendlich groß werden, kann übrigens auch verschiedenen anderen vielfachen Punkten entsprechen, in denen sich zwei oder mehrere Arme der Curve vereinigen, welche zugleich eine Parallele zur Achse der *y* berühren und dabei entweder einander durchschneiden oder nicht.

§. 209. Was die Fälle betrifft, in denen die ersten Differentialverhältnisse zu Null werden, während die fol-

genden Differentialverhältnisse endliche Werthe annehmen, welche Wurzeln in sich enthalten, so geben sie zu ähnlichen vielfachen Punkten Anlaß, wie vorhin, in denen jedoch die Tangente der Curve parallel zur Achse der x liegt.

Wenn aber die erste Differentiation schon hinreichend gewesen ist, um den Factor wegzuschaffen, mit welchem die Wurzel in der gegebenen Funktion behaftet gewesen ist und welcher für den besonderen Werth $x = a$ zu Null wurde, so wird das erste Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$, welches die Wurzel wieder enthält, mehrere verschiedene endliche Werthe geben, und man hat mithin einen vielfachen Punkt, in welchem die Arme der Curve einander schneiden, ohne sich zu berühren. Und wenn in einem solchen Punkte überdies der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu Null wird, so findet zugleich in jedem der Arme der Curve eine Beugung statt.

§. 210. Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß man mit der Benennung isolirte oder conjugirte Punkte gewisse Punkte bezeichnet hat, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung zwischen x und y Genüge leisten, während sie selbst jedoch völlig getrennt von der Linie liegen, welche diese Gleichung darstellt. So hat man z. B. einen conjugirten Punkt für den Werth $x = a$, wenn dieser Werth in der Function $y = f(x)$ eine Wurzel zum Verschwinden bringt, ohne sie in $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, 2c. verschwinden zu lassen, und zugleich diese Wurzel für alle Werthe von x zwischen $a + b$ und $a - b$, wo b eine beliebige endliche Größe vorstellt, imaginär ist.

XXI. Berührende Ebenen und Normalen an krummen Flächen.

§. 211. In der Kürze sollen hier zunächst die hauptsächlichsten Formeln aus der analytischen Geometrie von drei Dimensionen zusammengestellt werden.

Die Richtung einer geraden Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, wird durch die drei Winkel α, β, γ festgelegt, welche diese Linie mit den positiven Theilen der Achsen der x, y, z einschließt. Die Cosinus dieser Winkel stehen offenbar unter einander in denselben Verhältnissen wie die Coordinaten x, y, z, so daß man die Gleichungen hat

$$\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{x}{z}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad \frac{y}{z}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

von denen je zwei die dritte zur Folge haben. Da ferner die Coordinaten desjenigen Punkts der Linie, welcher den Abstand 1 vom Anfangspunkte hat, resp. sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so folgt

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1.$$

Bezeichnet man mit

$$x=az,\quad y=bz$$

die Gleichungen der Projectionen der geraden Linie auf die Ebenen xz und yz, so ist

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

und daraus

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Man kann in diesen Formeln nach Gefallen der Wurzel das Vorzeichen + oder — geben, wenn man nur in allen

drei Formeln das nämliche Vorzeichen setzt. Je nach dem Vorzeichen dieser Wurzel gehören die Winkel α, β, γ zu dem einen oder dem andern von denjenigen Theilen der Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten von einander getrennt werden. Nimmt man sie positiv, so beziehen sich diese Winkel immer auf den Theil der Linie, welche auf der Seite der positiven z liegt, d. h. welcher mit dem positiven Theile der Achse der z einen spitzen Winkel bildet.

§. 212. Es seien zwei gerade Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt, welche mit den Achsen resp. die Winkel α, β, γ und α', β', γ' bilden. Der gegenseitige Abstand derjenigen beiden Punkte dieser Linien, welche in dem Abstande 1 vom Anfangspunkte liegen, beträgt das Doppelte vom Sinus der Hälfte des Winkels, welchen die Linien mit einander einschließen. Nennt man also ω diesen Winkel, so ist

$$4\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma')^2,$$

welche Gleichung sich vereinfacht in

$$2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = 1 - (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma').$$

Aber weil $\cos\omega = \cos\frac{1}{2}\omega^2 - \sin\frac{1}{2}\omega^2 = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\omega^2$, so wird endlich

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

Wenn die beiden geraden Linien rechtwinklig auf einander stehen, so hat man

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.$$

Folglich werden zwei gerade Linien, deren Gleichungen resp. sind

$$x = az, \qquad y = bz$$

und $$x = a'z, \qquad y = b'z$$

auf einander rechtwinkelig stehen, wenn man hat

$$aa' + bb' + 1 = 0.$$

§. 213. Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, sei

$$z = fx + gy,$$

und die Gleichungen einer geraden Linie, welche durch denselben Anfangspunkt geht,

$$x = az, \quad y = bz.$$

Sodann wird diese Linie in jener Ebene enthalten sein, wenn den drei Gleichungen durch die nämlichen Werthe von x, y, z Genüge geschieht. Dies gibt die Bedingungsgleichung

$$1 = af + bg.$$

§. 214. Die allgemeine Gleichung einer Ebene ist

$$z = fx + gy + h,$$

wo x und y zwei unabhängige Veränderliche bezeichnen, und z eine Function dieser Veränderlichen. Es seien nun x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts im Raume, und man habe von diesem Punkte eine gerade Linie nach einem beliebigen Punkte der Ebene gelegt, dessen Coordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden mögen. Der Abstand beider Punkte wird alsdann ausgedrückt werden durch

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

wo x', y', z' an die Gleichung gebunden sind

$$z' = fx' + gy' + h.$$

Nun wird die in Rede stehende gerade Linie ein Perpendikel auf der Ebene sein, wenn der vorstehende Ausdruck, in welchem man z' wie eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x' und y' ansehen muß, ein Minimum wird. Um die Lage dieses Perpendikels zu erkennen, hat man also gemäß den §§. 147 ꝛc. die Differentiale dieses Ausdrucks in Bezug auf x' und auf y' einzeln gleich Null zu setzen. Dies gibt

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \quad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0,$$

welches mithin die Gleichungen des gesuchten Perpendikels sind. Setzt man darin für $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ ihre Werthe aus der Gleichung der Ebene, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$x - x' + f(z - z') = 0, \quad y - y' + g(z - z') = 0.$$

Wenn man die Winkel, welche dieses Perpendikel mit den Achsen der x, y, z einschließt, resp. mit λ, μ, ν bezeichnet, so hat man

$$\cos\lambda = \frac{-f}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \quad \cos\mu = \frac{-g}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{f^2+g^2+1}}.$$

Die Winkel, welche die gegebene Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy bildet, sind von diesen Winkeln λ, μ, ν nicht verschieden.

§. 215. Der Winkel, welchen zwei Ebenen mit einander einschließen, ist gleich dem Winkel zwischen den beiden auf diesen Ebenen errichteten Perpendikeln. Nennt man also φ den Winkel zwischen den beiden Ebenen, deren Gleichungen resp. sind

$$z = fx + gy + h$$
$$z = f'x + g'y + h',$$

so hat man

$$\cos\varphi = \frac{ff' + gg' + 1}{\sqrt{f^2+g^2+1} \cdot \sqrt{f'^2+g'^2+1}}.$$

Die Bedingung, welche erfüllt werden muß, damit die beiden Ebenen rechtwinklig auf einander stehen, ist also

$$ff' + gg' + 1 = 0.$$

§. 216. Wenn die Gleichung der Ebene in der Gestalt gegeben ist

$$K + Lx + My + Nz = 0,$$

so erhält man als Gleichungen des auf ihr errichteten Perpendikels

$$z - z' = \frac{N}{L}(x - x'), \quad z - z' = \frac{N}{M}(y - y');$$

und die Cosinus der Winkel, welche dieses Perpendikel mit den Achsen der x, y, z, oder welche die gegebene Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy einschließt, sind resp.

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

§. 217. Man betrachte jetzt eine beliebige Fläche, deren Gleichung allgemein dargestellt wird durch

$$z = f(x, y),$$

wo x und y wie bisher zwei unabhängige Veränderliche bezeichnen; es werde die Aufgabe gestellt, die berührende Ebene (Tangentialebene) und die Normale in demjenigen Punkte dieser Fläche zu bestimmen, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Man könnte zunächst die Lage der Normale durch dieselbe Betrachtung finden, welche im §. 214 angewandt worden ist, wenn man nämlich als evident ansieht, daß der kürzeste Abstand eines beliebigen Punkts der Normale von der gegebenen Fläche in die Normale selbst fallen muß. Wie oben würde man als Gleichungen der Normale finden

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \qquad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0,$$

wo $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ die partiellen Differentialverhältnisse der Function z' bedeuten, welche aus der Gleichung $z' = f(x', y')$ hervorgehen, der die Coordinaten des in Betracht gezogenen Punkts der Fläche genügen müssen. Aber es ist hier besser, die Lage der berührenden Ebene durch ähnliche Betrachtungen zu bestimmen, wie im XVI. Abschnitte zu Grunde gelegt wurden.

Eine Ebene berührt eine Fläche, wenn zwischen der Fläche und jener Ebene keine andere Ebene hindurchgelegt

werden kann. Sind nun x' und y' die Abscissen irgend eines Punktes der gegebenen Fläche, dessen Ordinate z' ist, so werden die Ordinaten der benachbarten Punkte nach §. 138 allgemein ausgedrückt werden durch

$$z' + \frac{dz'}{dx'}h + \frac{dz'}{dy'}k + \frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z'}{dx'\,dy'}hk + \frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{k^2}{2} + \text{etc.}$$

Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x' y' z' sind, ist aber

$$z - z' = f(x - x') + g\,(y - y'),$$

folglich werden die Ordinaten der benachbarten Punkte dieser Ebene dargestellt durch

$$z' + fh + gk.$$

Der Unterschied zwischen den Ordinaten der Fläche und denen der Ebene ist also

$$\left(\frac{dz'}{dx'} - f\right)h + \left(\frac{dz'}{dy'} - g\right)k + \frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z'}{dx'\,dy'}hk + \frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{k^2}{2} + \text{etc.}$$

Wenn man nun die Coefficienten f und g der Gleichung der Ebene durch die Bedingung bestimmt, daß in diesem Ausdrucke die Glieder der ersten Ordnung verschwinden sollen, d. h. wenn man setzt

$$f = \frac{dz'}{dx'}, \quad g = \frac{dz'}{dy'},$$

so verwandelt sich dieser Unterschied in

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2z'}{dx'\,dy'}hk + \frac{d^2z'}{dy'^2}\frac{k^2}{2} + \text{etc.};$$

und man erkennt durch dieselbe Betrachtung wie im §. 159, daß, wenn man für h und k kleinere und kleinere Werthe setzt, man den gedachten Unterschied geringer machen kann, als für jede andere Ebene, welche der vorhin gestellten Bedingung nicht genügt.

Die Gleichung einer berührenden Ebene in demjenigen Punkte der gegebenen Fläche, dessen Coordinaten x', y', z' sind, wird also nach dem Vorstehenden

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Man erhält daraus unmittelbar, nach §. 214, die Gleichungen der Normale

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \qquad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

Darin bedeuten $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ diejenigen Werthe der partiellen Differentialverhältnisse der Function $z = f(x, y)$, welche dem Berührungspunkte entsprechen.

Wenn man ferner mit λ, μ, ν die Winkel bezeichnet, welche die Normale mit den Achsen der x, y, z bildet, so hat man

$$\cos\lambda = \frac{-\frac{dz'}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\mu = \frac{-\frac{dz'}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 + 1}}.$$

Diese Ausdrücke entsprechen zugleich den Winkeln, welche die berührende Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy einschließt. Nimmt man darin die Wurzel positiv, so gehören sie zu demjenigen Theile der Normale, welcher, von der Fläche aus gerechnet, nach der Seite der positiven z liegt, d. h. mit dem positiven Theile der Achse der z einen spitzen Winkel bildet.

§. 218. Wenn die Gleichung der Fläche in der Form gegeben ist

$$F(x, y, z) = 0,$$

so sind nach §. 45 ihre Differentialgleichungen der ersten Ordnung

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Die Gleichung der berührenden Ebene wird also

$$\frac{dF}{dx'}(x-x') + \frac{dF}{dy'}(y-y') + \frac{dF}{dz'}(z-z') = 0,$$

die Gleichungen der Normale werden

$$z-z' = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dx'}}(x-x'), \quad z-z' = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\frac{dF}{dy'}}(y-y');$$

endlich die Cosinus der Winkel λ, μ, ν, welche die Normale mit den Achsen der x, y, z, oder die berührende Ebene mit den Ebenen yz, xz, xy einschließt, werden

$$\cos\lambda = \frac{\frac{dF}{dx'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{\frac{dF}{dy'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{\frac{dF}{dz'}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2}}.$$

§. 219. Eine berührende Ebene kann mit einer gegebenen Fläche im allgemeinen entweder nur einen einzigen Punkt gemein haben, welcher der Berührungspunkt ist; oder sie kann dieselbe in einer bestimmten Linie schneiden; oder in dieser Linie bloß berühren, ohne zu schneiden; oder endlich in der ganzen Ausdehnung dieser Linie zugleich berühren und schneiden. Man bemerke insbesondere die Fälle,

wo die berührende Ebene die Fläche in allen Punkten einer und derselben geraden Linie berührt, welche Eigenschaft den cylindrischen und conischen Flächen, und überhaupt den abwickelbaren Flächen zukommt; so wie auch den Fall, wo die berührende Ebene die Fläche in einer geraden Linie schneidet und nur in einem einzigen Punkte dieser Linie berührt, welche Eigenschaft die windschiefen Flächen besitzen.

Die Coordinaten x, y, z der Schnittlinie der Ebene mit der Fläche, wenn diese von jener in einem Punkte berührt wird, dessen Coordinaten x', y', z' sind, müssen augenscheinlich den beiden Gleichungen Genüge leisten

$$F(x, y, z) = 0$$
$$\frac{dF}{dx'}(x - x') + \frac{dF}{dy'}(y - y') + \frac{dF}{dz'}(z - z') = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die eine oder die andere der Veränderlichen x, y, z, so erhält man die Gleichungen der Projectionen der Schnittlinie auf die Coordinatenebenen.

§. 220. Unter einer Normalebene einer Fläche in einem gegebenen Punkte versteht man jede Ebene, welche durch diesen Punkt rechtwinklig auf die berührende Ebene gelegt werden kann. Die Normale ist die gemeinschaftliche Durchschnittslinie aller Normalebenen. Ist allgemein

$$z - z' = f(x - x') + g(y - y')$$

die Gleichung irgend einer Ebene, welche durch den Punkt der Fläche geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so wird diese Ebene eine Normalebene der Fläche sein, wenn die Constanten f und g der Gleichung genügen

$$1 + f\frac{dz'}{dx'} + g\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

wo $\frac{dz'}{dx'}$ und $\frac{dz'}{dy'}$ wieder die frühere Bedeutung haben. Man erhält diese Gleichung sowol aus der Bedingung, daß die

Normalebene rechtwinklig zur berührenden Ebene liegen soll, nach den §§. 215 und 217, als auch aus der Bedingung daß die Normalebene die Normale in sich enthalten muß, nach den §§. 213 und 217.

§. 221. Endlich kann man noch bemerken, daß, wenn man durch den Berührungspunkt, welcher der Fläche und der berührenden Ebene gemeinschaftlich angehört, eine beliebige Ebene legt, sodann die Schnittlinie dieser Ebene mit der berührenden Ebene eine Tangente an der Schnittlinie dieser Ebene mit der gegebenen Fläche sein wird.*)

XXII. Curven von doppelter Krümmung.

---

§. 222. Jede krumme Linie im Raume ist gegeben, sobald man ihre Projectionen auf zwei der Coordinatenebenen kennt. Es seien

$$y = f(x), \quad z = F(x)$$

die Gleichungen der Projectionen einer Curve auf die Ebenen xy und xz. Eliminirt man x aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man eine dritte Gleichung zwischen y und z, welche der Projection der Curve auf die Ebene yz angehört. In diesen Gleichungen wird x als die unab-

---

*) Die Untersuchungen über die Berührungen höherer Ordnung und insbesondere über die Krümmung der Flächen folgen im zweiten Bande.

hängige Veränderliche angesehen; y und z sind bestimmte Functionen von x. Denn die Lage eines Punkts einer gegebenen Curve im Raume ist bestimmt, wenn nur eine von den Coordinaten dieses Punkts gegeben ist.

§. 223. Man betrachte die beiden Punkte der Curve, denen die Abscissen x und $x + \Delta x$ zugehören. Die durch beide Punkte hindurchgelegte Secante wird, wenn man Δx abnehmen läßt, immer mehr mit der Tangente der Curve in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, zusammenfallen. Nun sind die drei Coordinaten des ersten Punktes x, y, z, und die des zweiten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, wo Δy und Δz durch Δx und die obigen Gleichungen bestimmt sind. Mithin werden die Cosinus der drei Winkel, welche die Secante mit den Achsen der x, y, z einschließt, ausgedrückt durch

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \quad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} \quad \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Je mehr nun Δx sich dem Werthe Null nähert, desto mehr nähern sich die Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ den Gränzen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, d. h. den Differentialverhältnissen der Functionen $y = f(x)$ und $z = F(x)$. Nennt man also α, β, γ die drei Winkel, welche die Tangente der Curve mit den Achsen der x, y, z einschließt, so hat man

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

n welchen Formeln man für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ ihre Werthe aus len Gleichungen $y=f(x)$ und $z=F(x)$ zu setzen hat.

§. 224. Die vorstehenden Ausdrücke geben unmittelbar lie Gleichungen der Tangente. Es seien allgemein

$$y-y'=m(x-x'),\quad z-z'=n(x-x')$$

lie Gleichungen einer beliebigen geraden Linie, welche durch len Punkt der Curve geht, dessen Coordinaten x', y', z' ind. Diese gerade Linie wird die Curve berühren, wenn nan hat (s. §. 211)

$$m=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{dy'}{dx'},\quad n=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{dz'}{dx'}.$$

Die Gleichungen der Tangente sind also

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x'),\quad z-z'=\frac{dz'}{dx'}(x-x'),$$

us denen man noch ziehen kann

$$z-z'=\frac{\frac{dz'}{dx'}}{\frac{dy'}{dx'}}(y-y');$$

ind, wie sich leicht voraussehen ließ, die Projectionen der Tangente auf die Coordinatenebenen sind Tangenten an den Projectionen der Curve.

§. 225. Man findet daraus gleichfalls die Gleichung der Normalebene. Es sei allgemein

$$z - z' = f(x - x') + g(y - y')$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt der Curve geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind. Diese Ebene wird nach §. 214 rechtwinklig auf der Tangente der Curve stehen, wenn man hat

$$f = -\frac{1}{\frac{dz'}{dx'}}, \quad g = -\frac{\frac{dy'}{dx'}}{\frac{dz'}{dx'}}.$$

Folglich wird die Gleichung der in Rede stehenden Normalebene

$$x - x' + \frac{dy'}{dx'}(y - y') + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0.$$

§. 226. Endlich wenn man mit

$$y - y' = m(x - x'), \quad z - z' = n(x - x')$$

die Gleichungen einer geraden Linie bezeichnet, welche gleichfalls durch den Punkt geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so wird nach §. 213 diese Linie in der Normalebene enthalten sein und mithin rechtwinklig auf der Curve stehen, wenn die Constanten m und n der Gleichung genügen

$$1 + m\frac{dy'}{dx'} + n\frac{dz'}{dx'} = 0.$$

§. 227. Um den Ausdruck für das Differential des Bogens einer Curve zu finden, seien M und N, Fig. 41, die Punkte, deren Coordinaten resp. sind x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Die Länge der Sehne MN ist sodann $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. An den Punkt M der Curve werde die Tangente MT gelegt und auf diese Tangente das Perpendikel NT herabgezogen; überdies der Bogen MN der Curve auf die Ebene MNT projicirt. Nennt man nun φ den Winkel NMT, welcher zwischen Sehne und Tangente enthalten ist, so erkennt man, daß diese

Fig. 41.

Projection des Bogens MN größer ist als die Gerade MN, und kleiner als $MT+TN$, d. h. kleiner als

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\,.\,(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

Folglich wenn man mit Δs die in Rede stehende Projection des Bogens MN bezeichnet, so hat man

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\,.\,(1+\omega)$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,.\,(1+\omega),$$

wo $\omega<\varphi-\frac{1}{2}\varphi^2-$ ꝛc. ist. Läßt man sodann Δx zu Null werden, so wird der Bogen der Curve immer mehr mit seiner Projection zusammenfallen, und der Winkel φ gleichfalls immer näher an Null kommen. Man kann also die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ wie identisch ansehen mit der Gränze des Verhältnisses des Bogens der Curve zu Δx; und wenn man diese letztere Gränze mit $\frac{ds}{dx}$ bezeichnet, so wird

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},\ \text{und}\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Man wird der Wurzel das Vorzeichen $+$ oder $-$ geben, je nachdem der Bogen s zunimmt oder abnimmt, wenn man die Abscisse x wachsen läßt.

§. 228. Man kann hier eine ähnliche Bemerkung machen, wie im §. 169. Die Cosinus der Winkel α, β, γ, welche die Tangente der Curve mit den Achsen der x, y, z einschließt, lassen sich nämlich jetzt auch ausdrücken durch

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

In diesen Formeln wird man dem Differentiale ds das Vorzeichen $+$ oder $-$ geben, je nachdem man die Winkel α, β, γ in Bezug auf den einen oder den andern der beiden

Theile der Tangente nimmt, welche durch den Berührungspunkt von einander getrennt werden.

§. 229. Wenn man, wie bisher, eine Curve durch ihre beiden Projectionen auf die Ebenen xy und xz als gegeben annimmt, so betrachtet man diese Curve wie die Schnittlinie zweier cylindrischen Flächen, welche die genannten Projectionen zu Grundflächen haben, und deren Erzeugungslinien resp. rechtwinklig auf jenen beiden Ebenen stehen. Aber eine Curve kann auf allgemeinere Weise wie die Schnittlinie zweier irgend beliebigen Flächen angesehen werden, deren Gleichungen sind

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Die Ordinaten y und z sind hier unentwickelte Functionen der Abscisse x. Wendet man also das Verfahren der §§. 44 und 45 an, so erhält man durch Differentiation dieser beiden Gleichungen

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

und daraus für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}}{\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}}{\frac{dF}{dz}\frac{df}{dy} - \frac{df}{dz}\frac{dF}{dy}}.$$

Diese Werthe müssen in die Formeln der vorigen Paragraphen substituirt werden, um diese auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Hinterher kann man sodann y und z mit Hülfe der gegebenen Gleichungen $f(x, y, z) = 0$ und $F(x, y, z) = 0$ eliminiren.

§. 230. Man kann noch bemerken, daß nach §. 218, wenn man mit x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der gegebenen Curve bezeichnet, und in diesem Punkte zwei berührende Ebenen an diejenigen beiden Flächen legt, deren Schnittlinie mit jener Curve identisch ist, die Gleichungen dieser beiden Ebenen resp. sein werden

$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0$$

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0.$$

Diese beiden Gleichungen gehören also zugleich auch der Tangente der Curve an, und bestimmen deren Lage. Allgemein erhält man die Gleichungen der Tangente, wenn man in den Differentialgleichungen der Curve statt dx', dy', dz' resp. schreibt $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

Krümmungsebene. Halbmesser der ersten und der zweiten Krümmung.

§. 231. Die Betrachtungen des XVI. Abschnitts über die Berührung ebener Curven lassen sich allgemein, wie man schon in dem vorigen Abschnitte sehen konnte, auf die Berührung von Linien und Flächen überhaupt anwenden.

Wenn eine Linie gegeben ist durch die Gleichungen

$$y=f(x),\quad z=F(x),$$

und eine zweite Linie durch die Gleichungen

$$y=\varphi(x),\quad z=\Phi(x),$$

und man sodann die Annahme macht, daß beide Linien einen Punkt mit einander gemein haben, dessen Coordinaten x, y, z sind, so erhält man als Ordinaten desjenigen Punkts der ersten Curve, welcher der Abscisse $x+h$ entspricht

$$y+\frac{d.f(x)}{dx}h+\frac{d^2.f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{rc.},\quad z+\frac{d.F(x)}{dx}h+\frac{d^2.F(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{rc.};$$

und als Ordinaten desjenigen Punkts der zweiten Curve, welcher der nämlichen Abscisse zugehört

$$y=\frac{d.\varphi(x)}{dx}h+\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{rc.},\quad z+\frac{d.\Phi(x)}{dx}h+\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\text{rc.}$$

Die Differenzen unter diesen Ordinaten sind also resp.

$$e = \left(\frac{d.f(x)}{dx} - \frac{d.\varphi(x)}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.f(x)}{dx^2} - \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \text{ꝛc.}$$
$$E = \left(\frac{d.F(x)}{dx} - \frac{d.\Phi(x)}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.F(x)}{dx^2} - \frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2}\right)\frac{h^2}{2} + \text{ꝛc.}$$

und man hat

$$\sqrt{e^2 + E^2}$$

als Ausdruck für die Entfernung der in Rede stehenden Punkte der beiden Curven. Nun erkennt man durch dieselben Schlußweisen, welche im XVI. Abschnitte angewandt worden sind, daß, wenn man die in den Gleichungen $y = \varphi(x)$, $z = \Phi(x)$ der zweiten Curve enthaltenen Constanten so bestimmt, daß sie den Bedingungen $\frac{d.\varphi(x)}{dx} = \frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d.\Phi(x)}{dx} = \frac{d.F(x)}{dx}$ Genüge leisten, die zweite Curve mit der erstern eine Berührung der ersten Ordnung eingehen wird, und daß keine andere Curve sich derselben mehr nähern kann, wenn sie nicht den nämlichen Bedingungen unterworfen ist. Ebenso erkennt man, daß, wenn überdies den Bedingungen $\frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} = \frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2.\Phi(x)}{dx^2} = \frac{d^2.F(x)}{dx^2}$ Genüge geschieht, die beiden Curven eine Berührung der zweiten Ordnung mit einander eingehen werden, und daß keine andere Curve sich der ersteren mehr nähern kann, wenn sie nicht denselben Bedingungen unterworfen ist. Und so fort.

§. 232. Die Berührung einer Curve mit einer Ebene kann auf ähnliche Weise betrachtet werden. Die Gleichungen der gegebenen Curve seien

$$y = f(x), \quad z = F(x),$$

und die Gleichung einer beliebigen Ebene, welche durch denjenigen Punkt der Curve gelegt ist, dessen Coordinaten x', y', z' sind,

$$z - z' = m(x - x') + n(y - y').$$

Wenn nun die Abscisse x' übergeht in $x' + h$, so erhält man für den entsprechenden Punkt der Curve

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \text{2c.},\quad z = z' + \frac{dz'}{dx'}h + \frac{d^2z'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \text{2c.};$$

und für den Punkt der Ebene, welcher den Abscissen $x' + h$ und $y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \text{2c.}$ zugehört

$$z - z' = mh + n\left(\frac{dy'}{dx'}h + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{h^2}{2} + \text{2c.}\right).$$

Die Differenz der beiden Werthe von z, welche der Ebene und der Curve angehören, wird also

$$\left(\frac{dz'}{dx'} - m - n\frac{dy'}{dx'}\right)h + \left(\frac{d^2z'}{dx'^2} - n\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)\frac{h^2}{2} + \text{2c.}$$

Will man nun zunächst, daß die Ebene eine berührende Ebene an der Curve sei, so müssen die Constanten m und n der Gleichung genügen

$$\frac{dz'}{dx'} - m - n\frac{dy'}{dx'} = 0;$$

und es ist nach §. 213 und mit Rücksicht auf die Gleichungen der Tangente im §. 224 leicht zu erkennen, daß die vorstehende Gleichung aussagt, daß die Ebene durch die Tangente der Curve hindurchgehen muß.

Diese Gleichung reicht nicht hin, um m und n zu bestimmen, und in der That gibt es eine unendliche Menge von Ebenen, welche durch die Tangente hindurchgelegt werden können und sämmtlich die Curve berühren. Aber wenn man noch die Gleichung hinzufügt

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} - n\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

so stellt man damit zwischen der Curve und der Ebene die innigste Berührung her, welche möglich ist, indem keine andere Ebene zwischen jener und der Curve hindurchgehen kann. Aus beiden Gleichungen erhält man

$$n = \frac{\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},\quad m = \frac{\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2} - \frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

folglich wird die Gleichung der in Rede stehenden Ebene

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}(z-z')=\left(\frac{dz'}{dx'}\frac{d^2y'}{dx'^2}-\frac{dy'}{dx'}\frac{d^2z'}{dx'^2}\right)(x-x')+\frac{d^2z'}{dx'^2}(y-y').$$

Diese Ebene heißt die osculatorische Ebene, weil sie eine Berührung der zweiten Ordnung mit der Curve eingeht, oder aus einem später anzugebenden Grunde die Krümmungsebene der gegebenen Curve.

§. 233. In dem Vorstehenden wurde x als unabhängige Veränderliche angesehen, und y und z waren Functionen von x. Will man x, y, z als Functionen einer beliebigen anderen unabhängigen Veränderlichen betrachten, so kann man die Gleichung der Krümmungsebene für diesen Fall finden, wenn man statt $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, und $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2}$ diejenigen Ausdrücke setzt, welche im §. 74 für die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen gegeben worden sind. Aber man gelangt dazu einfacher, wenn man von der allgemeinen Gleichung einer Ebene ausgeht, welche durch den Punkt der Curve gelegt ist, dessen Coordinaten x', y', z' sind; nämlich

$$A(x-x')+B(y-y')+z-z'=0,$$

woraus man, indem x, y und z auf gleiche Weise als veränderlich angesehen werden, die beiden Differentialgleichungen der ersten und der zweiten Ordnung erhält

$$Adx+Bdy+dz=0$$
$$Ad^2x+Bd^2y+d^2z=0.$$

Jene Ebene wird nun die gesuchte Krümmungsebene sein, wenn diesen beiden Differentialgleichungen durch diejenigen Werthe dx', dy', dz', und d^2x', d^2y', d^2z' Genüge geschieht, welche der Curve angehören. Bestimmt man also die Constanten A und B durch die beiden Gleichungen

$$Adx'+Bdy'+dz'=0$$
$$Ad^2x'+Bd^2y'+d^2z'=0$$

und substituirt ihre Werthe in die obige allgemeine Gleichung der Ebene, so kommt

$$(dy' d^2z' - dz' d^2y')(x-x') + (dz' d^2x' - dx' d^2z')(y-y')$$
$$+ (dx' d^2y' - dy' d^2x')(z-z') = 0$$

als die gesuchte Gleichung der Krümmungsebene.

Wollte man x zur unabhängigen Veränderlichen annehmen, so hätte man in dieser Gleichung $d^2x' = 0$ zu setzen; man würde dadurch wieder auf die Gleichung des vorigen Paragraphen zurückkommen.

§. 234. Man betrachte jetzt die Berührung der gegebenen Curve von doppelter Krümmung mit einer Kugelfläche deren allgemeine Gleichung ist

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \varrho^2,$$

wo α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunkts und ϱ den Halbmesser der Kugel bezeichnen. Wenn diese Fläche durch den Punkt der Curve geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so hat man

$$(\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 + (\gamma - z')^2 = \varrho^2.$$

Wenn sie überdies die Curve einfach berührt, so muß die Differentialgleichung der ersten Ordnung von dieser letztern, wenn man in derselben nur x', y', z' als veränderlich ansieht, nämlich

$$(\alpha - x') dx' + (\beta - y') dy' + (\gamma - z') dz' = 0,$$

durch diejenigen Werthe von dx', dy', dz' erfüllt werden, welche der Curve angehören. Jede Kugelfläche, welche so bestimmt ist, daß die Constanten α, β, γ und ϱ diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, wird also die gegebene Curve berühren. Man erkennt übrigens aus §. 225, daß die zweite von diesen Gleichungen anzeigt, daß der Mittelpunkt der Kugelfläche sich in der Normalebene der gegebenen Curve befinden muß.

§. 235. Wenn die Kugelfläche eine Berührung der zweiten Ordnung mit der gegebenen Curve eingeht, so muß die Differentialgleichung der zweiten Ordnung von der obigen Gleichung, nämlich

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2-(\alpha-x')d^2x'-(\beta-y')d^2y'-(\gamma-z')d^2z'=0,$$

gleichfalls noch durch diejenigen Werthe der Differentiale von x', y', z' erfüllt werden, welche man aus den Gleichungen der Curve erhält. Nimmt man also die genannten Differentiale auf diese Weise als festgestellt an, so wird jede Kugelfläche, für welche α, β, γ und ϱ den vorstehenden Gleichungen Genüge leisten, mit der gegebenen Curve eine Berührung der zweiten Ordnung eingehen. Da ferner die letzte Gleichung aus der Differentiation der Gleichung der Normalebene hervorgegangen ist, welche durch denjenigen Punkt der Curve geht, dessen Coordinaten x', y', z' sind, so ist klar, daß die gedachte Gleichung derjenigen Normalebene der Curve angehören muß, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten $x'+dx'$, $y'+dy'$, $z'+dz'$ sind. Hieraus ergibt sich, daß der Mittelpunkt der osculatorischen Kugel in einer geraden Linie liegt, welche durch den Durchschnitt der Normalebenen zweier Punkte der Curve gebildet wird, deren Abstand kleiner gedacht werden muß als jede angebbare Größe.

§. 236. Wenn man durch den Mittelpunkt einer Kugel, welche eine gegebene Curve im Punkte m berührt, und durch die Tangente der Curve in demselben Punkte, eine Ebene legt, so wird diese Ebene augenscheinlich die Kugel in einem größten Kreise schneiden, welcher gleichfalls die Curve berührt. Jede Curve hat also eine unendliche Anzahl von berührenden Kreisen, deren Mittelpunkte sämmtlich in der Normalebene der Curve liegen.

Unter allen berührenden Kugeln der gegebenen Curve

zeichnen sich zunächst die osculatorischen Kugeln aus, deren Mittelpunkte in der Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen liegen. Aber unter diesen Kugeln ist wieder diejenige besonders hervorzuheben, welche den kleinsten Halbmesser besitzt, und deren Mittelpunkt in der Krümmungsebene liegt, welche dem Punkte m der gegebenen Curve zugehört. Der größte Kreis, in welchem diese Kugel von der Krümmungsebene geschnitten wird, ist nicht nur ein berührender Kreis der gegebenen Curve im Punkte m, sondern er geht überdies in diesem Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung mit der Curve ein, weil er die Durchschnittslinie zweier Flächen ist, welche sich selbst mit der Curve in einer Berührung der zweiten Ordnung befinden. Folglich ist dieser Kreis der osculatorische Kreis oder, weil er demzufolge die Krümmung der Curve mißt, der Krümmungskreis der gegebenen Curve, und die Ebene, welche ihn in sich enthält, heißt eben daher die Krümmungsebene. Man findet augenscheinlich den Krümmungskreis, wenn man den obigen Bedingungen zur Bestimmung der Constanten α, β, γ und ϱ noch diejenige hinzufügt, daß der Gleichung der Krümmungsebene §. 233 Genüge geschehen muß, wenn man darin $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$ setzt. Die Coordinaten des Mittelpunkts und der Halbmesser des Krümmungskreises werden also durch folgende vier Gleichungen gegeben

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\varrho^2$$
$$(\alpha-x)\,dx+(\beta-y)\,dy+(\gamma-z)\,dz=0$$
$$ds^2-(\alpha-x)\,d^2x-(\beta-y)\,d^2y-(\gamma-z)\,d^2z=0$$
$$(\alpha-x)X+(\beta-y)\,Y+(\gamma-z)\,Z=0.$$

Zu größerer Einfachheit sind hier die Accente weggeblieben; für $dx^2+dy^2+dz^2$ ist sein Werth ds^2 gesetzt, und endlich zur Abkürzung

$$X=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\ Y=dz\,d^2x-dx\,d^2z,\ Z=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

Man erhält daraus durch Elimination

$$\alpha - x = \frac{ds^2(Ydz - Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$\beta - y = \frac{ds^2(Zdx - Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$\gamma - z = \frac{ds^2(Xdy - Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$\varrho = \frac{ds^2\sqrt{(Ydz-Zdy)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Xdy-Ydx)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Nun ist ferner

$$Ydz-Zdy=(dzd^2x-dxd^2z)dz-(dxd^2y-dyd^2x)dy$$
$$=(dx^2+dy^2+dz^2)d^2x-dx(dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z)$$
$$=ds^2d^2x-dxds\,d^2s=ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right);$$

ebenso

$$Zdx-Xdz=ds^2d^2y-dydsd^2s=ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$Xdy-Ydx=ds^2d^2z-dzdsd^2s=ds^3.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

und folglich

$$(Ydz-Zdy)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Xdy-Ydx)^2=ds^4[(d^2x)^2+$$
$$+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2].$$

Außerdem wird

$$X^2+Y^2+Z^2=ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2].$$

Mithin kann man die vorigen Ausdrücke schreiben

$$\alpha - x = \frac{ds^3.d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$

$$\beta - y = \frac{ds^3.d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$

$$\gamma - z = \frac{ds^3.d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}$$

$$\varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Diese Ausdrücke entsprechen sogleich dem besonderen Falle, wo man den Bogen s als unabhängige Veränderliche, d. h. ds als constantes Differential ansieht, wenn man $d^2s = 0$ setzt und folglich statt $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ schreibt $\frac{d^2x}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds}$, $\frac{d^2z}{ds}$.

§. 237. Man kann zu diesen Ausdrücken auch direct gelangen, wenn man die Entwickelungen des §. 185, welche eine ebene Curve betreffen, auf jede beliebige Curve ausdehnt. Man betrachte drei auf einander folgende Punkte der Curve, nämlich den Punkt l, Fig. 42, dessen Coordinaten x, y, z sind; den Punkt m, dessen Coordinaten sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; und den Punkt n, dessen Coordinaten sind $x + 2dx + d^2x$, $y + 2dy + d^2y$, $z + 2dz + d^2z$. In dem Intervalle lm, oder ds, wird die Curve als zusammenfallend mit der Tangente im Punkte l gedacht, und ebenso in dem Intervalle mn, oder $ds + d^2s$, als zusammenfallend mit der Tangente im Punkte m. Die Ebene, welche die beiden Tangenten lm und mn in sich enthält, ist die Krümmungsebene der Curve im Punkte l. Verlängert man lm um die Größe $mc = lm$, und beschreibt aus diesem Punkte m als Mittelpunkt den unendlich kleinen Bogen ce, so hat en die Bedeutung d^2s. Ferner kann man ce wie eine gerade Linie ansehen, und die Winkel, welche diese Linie mit mc und mn bildet, wie rechte Winkel, weil sie von einem rechten Winkel nur um eine unendlich kleine Größe verschieden sind. Endlich gibt das Verhältniß $\frac{ce}{cm}$ den Werth des Contingenzwinkels (s. §. 182), so daß

Fig. 42.

$$\frac{ce}{cm} = \frac{ds}{\varrho}, \quad \text{woraus } \varrho = \frac{ds^2}{ce},$$

wo ϱ wie bisher den Krümmungshalbmesser bedeutet. Bemerkt man sodann, daß die Coordinaten des Punktes e sind $x+2dx$, $y+2dy$, $z+2dz$, so sieht man, daß die Projectionen von cn auf die Achsen der x, y, z sein werden d^2x, d^2y, d^2z. Also wird

$$cn=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}$$

und folglich

$$ce=\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)-(d^2s)^2};$$

woraus hervorgeht

$$\varrho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}.$$

Will man jetzt auch die Lage des Krümmungshalbmessers bestimmen, welcher der Linie ce parallel ist, so hat man zu bemerken, daß die Cosinus der Winkel, welche lm mit den Achsen einschließt, resp. sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; und demnach die Cosinus der Winkel, welche mn mit den Achsen einschließt, $\frac{dx}{ds}+d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $\frac{dy}{ds}+d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $\frac{dz}{ds}+d\left(\frac{dz}{ds}\right)$. Aber wenn im Dreieck mce die Linien mc und me gleich der Einheit wären, so würden die Projectionen dieser Linien auf die drei Achsen gleich den Cosinus derjenigen Winkel sein, welche sie selbst mit den Achsen einschließen. Die Projectionen von ce würden also gleich den Differenzen dieser Cosinus sein; woraus folgt, daß man die Projectionen von ce selbst erhalten wird, wenn man diese Differenzen mit mc oder ds multiplicirt. Bezeichnet man also wie oben mit λ, μ, ν die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser mit den Achsen der x, y, z bildet, so hat man

$$ce.\cos\lambda=ds.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\quad ce.\cos\mu=ds.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

$$ce.\cos\nu=ds.d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

oder weil $ce = \frac{ds^2}{\varrho}$ war,

$$\cos\lambda = \frac{\varrho}{ds} . d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ \cos\mu = \frac{\varrho}{ds} . d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ \cos\nu = \frac{\varrho}{ds} . d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

§. 238. Aus diesen Gleichungen kann man leicht noch folgenden bemerkenswerthen Ausdruck für den Contingenzwinkel einer Curve von doppelter Krümmung herleiten

$$\frac{ce}{ds} = \frac{ds}{\varrho} = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

Zugleich erkennt man, daß der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ auch unter der Form

$$\varrho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}$$

dargestellt werden kann, wie man übrigens auch schon aus §. 236 hätte schließen können.

Bezeichnet man ferner wie im §. 223 mit α, β, γ die Winkel, welche die Tangente der Curve in demjenigen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit den Achsen bildet; nennt man überdies ω den Contingenzwinkel, und berücksichtigt die Ausdrücke des §. 228 für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so verwandelt sich der vorige Ausdruck in

$$\omega = \sqrt{(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2}.$$

Diese Gleichung kann man auch direct herleiten. Denn man hat

$$\cos\omega = \cos\alpha\,(\cos\alpha + d.\cos\alpha) + \cos\beta\,(\cos\beta + d.\cos\beta) \\ + \cos\gamma\,(\cos\gamma + d.\cos\gamma),$$

und da allgemein $\cos\omega = \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2$, folglich $1 - \cos\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2$, so wird

$$(2\sin\tfrac{1}{2}\omega)^2 = 2 - 2\cos\alpha(\cos\alpha + d.\cos\alpha) - 2\cos\beta(\cos\beta + d.\cos\beta) \\ - 2\cos\gamma\,(\cos\gamma + d.\cos\gamma).$$

Setzt man nun statt der Zahl 2 den damit gleichbedeutenden Ausdruck

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2+(\cos\alpha+d.\cos\alpha)^2+(\cos\beta+d.\cos\beta)^2 + (\cos\gamma+d.\cos\gamma)^2,$$

reducirt sodann, und beachtet, daß, wenn man den Winkel ω unendlich klein annimmt, $(2\sin\frac{1}{2}\omega)^2=\omega^2$ wird, so erhält man wieder die vorige Gleichung. Diese Gleichung liefert allgemein den Ausdruck für den unendlich kleinen Winkel, welcher zwischen zwei unendlich nahe auf einander folgenden Lagen einer Linie enthalten ist, deren Winkel mit den Achsen durch α, β, γ ausgedrückt werden.

§. 239. Die vorstehenden Ergebnisse beziehen sich auf die erste Krümmung der vorgelegten Curve, welche im Sinne der Krümmungsebene stattfindet. Außerdem aber ist zu beachten, daß je zwei auf einander folgende Krümmungsebenen einen unendlich kleinen Winkel mit einander einschließen, welcher das Maß für die zweite Krümmung dieser Curve abgibt. Es sei Ω dieser Winkel, und die Gleichung der Krümmungsebene in der Gestalt, wie sie im §. 236 zur Anwendung kam

$$(\alpha-x)X+(\beta-y)Y+(\gamma-z)Z=0,$$

so werden nach §. 216 die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf dieser Ebene mit den Achsen der x, y, z bilden, resp. ausgedrückt werden durch

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Der Winkel Ω zwischen zwei auf einander folgender Krümmungensebenen ist aber gleich dem Winkel zwischen den beiden Normalen auf diesen Ebenen; folglich hat man nach dem vorigen Paragraphen

$$\Omega=\sqrt{\left(d.\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2+\left(d.\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\right)^2+\left(d.\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+}}\right.}$$

oder wenn man entwickelt und zusammenzieht

$$\Omega = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)\,(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

oder auch

$$\Omega = \frac{\sqrt{(XdY-YdX)^2+(YdZ-ZdY)^2+(ZdX-XdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Nun findet man aber leicht

$$dX = dyd^3z - dzd^3y,\; dY = dzd^3x - dxd^3z,\; dZ = dxd^3y - dyd^3x;$$

sodann

$$\frac{XdY-YdX}{dz} = \frac{YdZ-ZdY}{dx} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} =$$

$$dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z);$$

woraus folgt

$$\Omega = ds\,\frac{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)}{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2}.$$

Bezeichnet man mit P das Verhältniß des Bogenelements ds der Curve zu dem Winkel Ω zwischen den beiden Krümmungsebenen, welche den Endpunkten dieses Elements entsprechen, d. i. setzt man $\frac{ds}{P} = \Omega$, so wird

$$P = \frac{(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2}{dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)+dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)}.$$

Diesen Werth P pflegt man den Halbmesser der zweiten Krümmung zu nennen. Man sieht, daß der Halbmesser der zweiten Krümmung von den Differentialen der dritten Ordnung der Coordinaten x, y, z abhängt, während der Halbmesser der ersten Krümmung nur von den Differentialen der zweiten Ordnung abhängig war.

§. 240. Wenn für alle Punkte einer gegebenen Linie die Gleichung besteht

$$(dxd^2y-dyd^2x)^2+(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2=0$$

oder, was damit gleichbedeutend ist, die Gleichung

$$(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2=0,$$

so folgt vermöge der §§. 236 und 237, daß der Halbmesser ϱ der ersten Krümmung unendlich groß wird, oder daß je zwei auf einander folgende Elemente der Linie stets einen Winkel Null mit einander einschließen, d. h. die Verlängerung von einander bilden. Jede dieser beiden Gleichungen spricht also auf eine allgemeine Weise die analytische Bedingung aus, der die Werthe der Coordinaten x, y, z Genüge leisten müssen, damit sie einer geraden Linie angehören können.

§. 241. Wenn dagegen für alle Punkte einer Linie die Gleichung besteht

$$dz(d^2x\,d^3y-d^2y\,d^3x)+dx(d^2y\,d^3z-d^2z\,d^3y)$$
$$+dy(d^2z\,d^3x-d^2x\,d^3z)=0,$$

so folgt nach §. 239, daß der Halbmesser P der zweiten Krümmung unendlich groß wird, oder daß je zwei auf einander folgende Krümmungsebenen einen Winkel Null mit einander einschließen, d. h. zusammenfallen. Diese Gleichung gibt also allgemein die analytische Bedingung, der die Werthe der Coordinaten x, y, z genügen müssen, damit sie einer ebenen Curve angehören können.

Evoluten.

§. 242. Nach den §§. 234 und 235 erlangt eine Kugel mit einer gegebenen Curve in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, eine Berührung der zweiten Ordnung, wenn die Coordinaten α, β, γ des Mittelpunkts und der Halbmesser ϱ der Kugel den drei Gleichungen genügen

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2=\varrho^2$$
$$(\alpha-x)\,dx+(\beta-y)\,dy+(\gamma-z)\,dz=0$$
$$ds^2-(\alpha-x)\,d^2x-(\beta-y)\,d^2y-(\gamma-z)\,d^2z=0.$$

Da die Bestimmung einer Kugel von vier Constanten abhängt, hier dagegen nur drei Gleichungen Genüge geleistet werden soll, so folgt, daß für jeden Punkt der gegebenen Curve eine unendliche Menge von osculatorischen Kugeln angegeben werden kann. Alle diese Kugeln haben, wie schon oben gezeigt worden ist, ihre Mittelpunkte auf einer geraden Linie, welche sich als die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen ergibt, entsprechend den beiden Punkten der gegebenen Curve, deren Coordinaten sind x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Diese gerade Linie ist nothwendig rechtwinklig auf der Tangente der Curve in demjenigen Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind.

Man stelle sich nun den Inbegriff der Normalebenen vor, welche an sämmtliche Punkte der gegebenen Curve gelegt werden können; ferner die geraden Linien, welche sich durch den Durchschnitt je zweier auf einander folgender Normalebenen ergeben, so wie die durch den Inbegriff dieser geraden Linien gebildete abwickelbare Fläche. Der Kürze wegen mögen die gedachten geraden Linien die Kanten der abwickelbaren Fläche heißen. Jede Normalebene berührt diese Fläche in der ganzen Ausdehnung derjenigen Kante, welche dieser Ebene angehört. Die Kante selbst ist rechtwinklig auf der Tangente in demjenigen Punkte der Curve, durch welchen die Normalebene hindurchgeht, und sie ist zugleich der geometrische Ort der Mittelpunkte aller osculatorischen Kugeln, welche diesem Punkte entsprechen. Demnach kann man auch sagen, daß die in Rede stehende abwickelbare Fläche, welche durch die auf einander folgenden Durchschnitte der Normalebenen der gegebenen Curve gebildet wird, der geometrische Ort der Mittelpunkte aller osculatorischen Kugeln dieser Curve sei. Wenn man sich also in einen beliebigen Punkt μ der Fläche versetzt, und aus diesem Punkte eine Normale an die gegebene Curve zieht,

welche die letztere im Punkte m trifft, so wird die Kugel, welche aus μ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser μm beschrieben werden kann, eine Berührung der zweiten Ordnung mit der gegebenen Curve eingehen.

Nach dem Vorstehenden kann man in den obigen Gleichungen α, β, γ wie veränderliche Coordinaten ansehen, welche allen Punkten der Fläche zugehören, die den geometrischen Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln bildet. Man erhält die Gleichung dieser Fläche aus der Verbindung der Gleichungen

$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy + (\gamma - z)\,dz = 0$$
$$ds^2 - (\alpha - x)\,d^2x - (\beta - y)\,d^2y - (\gamma - z)\,d^2z = 0$$

mit den beiden Gleichungen der gegebenen Curve. Man hat alsdann vier Gleichungen, aus denen man x, y, z eliminiren kann; nach der Elimination bleibt eine Gleichung zwischen α, β, γ, welches die gesuchte Gleichung ist.

§. 243. Da die vorigen Gleichungen immer Gültigkeit behalten, wenn man für x, y, z Werthe setzt, welche einem Punkte der gegebenen Curve entsprechen, und zu gleicher Zeit für α, β, γ Werthe, welche einem beliebigen unter den Mittelpunkten der osculatorischen Kugeln dieses Punkts zugehören, so kann man dieselben differentiiren, indem man x, y, z und α, β, γ zugleich sich ändern läßt. Jede auf diese Weise erhaltene Gleichung wird noch immer der Fläche angehören, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist. Differentiirt man also die erste Gleichung, und unterdrückt alle Glieder, welche Null sind zufolge der zweiten Gleichung, so hat man

$$dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma = 0.$$

Diese Differentialgleichung läßt die Natur der in Rede stehenden Fläche deutlich erkennen. Setzt man $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

und $d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$, so kann man sie unter die Form bringen

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{d\beta}{d\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{d\gamma}{d\sigma} = 0,$$

und diese **Gleichung sagt aus: In welchem Sinne man** sich auch auf der Fläche von dem Punkte μ aus, welcher der Mittelpunkt einer dem Punkte m der gegebenen Curve angehörenden osculatorischen Kugel ist, fortbewegen mag, so wird das geradlinige Element $d\sigma$, welches man beschreibt, immer rechtwinklig stehen auf dem Element ds der Curve im Punkte m. Diese Eigenschaft entspringt offenbar daraus, daß die Fläche von der Normalebene der Curve in m in der ganzen Ausdehnung derjenigen Linie berührt wird, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dem Punkte m angehörenden osculatorischen Kugeln ist.

§. 244. Man betrachte jetzt die Linien, welche die Evoluten der gegebenen Curve sein können, indem diese ihre Evolvente ist, mit Festhaltung derjenigen Bedeutungen, welche diese Benennungen in den §§. 186 rc. erhalten haben. Denkt man sich nämlich, auf eine Curve sei ein Faden aufgewickelt, und derselbe werde abgewickelt, indem er beständig gespannt erhalten wird, so beschreibt jeder Punkt des Fadens eine zweite Curve, welche die Evolvente heißt, während die erste Curve die Evolute genannt wird. Der geometrische Charakter der Evolute besteht also lediglich in den beiden Eigenschaften: 1) daß jeder Punkt μ der Evolute Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die Evolvente in dem entsprechenden Punkte m berührt; 2) daß der Halbmesser μm die Evolute im Punkte μ berührt.

Hieraus erkennt man zunächst, daß eine Evolute der gegebenen Curve sich nothwendig auf der abwickelbaren Fläche befinden muß, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist. Denn es seien

l, m, n 2c. mehrere auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve, und λ, μ, ν 2c. die entsprechenden Punkte der Evolute. Da die Punkte λ, μ, ν 2c. die Mittelpunkte von Kreisen sein sollen, welche die gegebene Curve in l, m, n 2c. berühren, so müssen sie resp. in den Normalebenen liegen, welche man durch die Punkte l, m, n 2c. der gegebenen Curve legen kann. Man gelangt also von einem Punkte der Evolute zu einem andern, indem man von einer Normalebene zu der benachbarten Normalebene übergeht, d. h. indem man auf der Fläche fortschreitet, welche durch die auf einander folgenden Durchschnittslinien der Normalebenen gebildet wird. Wenn man mithin die Coordinaten α, β, γ nicht mehr wie einem beliebigen Punkte dieser Fläche, sondern nur noch einer der in Rede stehenden Evoluten angehörig ansieht, so müssen diese Coordinaten zunächst den Gleichungen genügen

$$(\alpha - x)\, dx + (\beta - y)\, dy + (\gamma - z)\, dz = 0$$
$$ds^2 - (\alpha - x) d^2x - (\beta - y) d^2y - (\gamma - z) d^2z = 0.$$

Ferner müssen dieselben Coordinaten der Bedingung genügen, daß der Halbmesser, welcher von einem Punkte der Evolute nach dem entsprechenden Punkte der gegebenen Curve gezogen wird, die Evolute berühre. Diese Bedingung läßt sich ausdrücken durch

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\alpha - x}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{\beta - y}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{\gamma - z}{\varrho},$$

oder

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\alpha - x}{\beta - y}, \quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{\alpha - x}{\gamma - z}, \quad \frac{d\beta}{d\gamma} = \frac{\beta - y}{\gamma - z}.$$

Verbindet man eine beliebige dieser Gleichungen mit den beiden vorhergehenden und mit den Gleichungen der gegebenen Curve, so hat man fünf Gleichungen, aus denen man x, y, z eliminiren kann. Es bleiben mithin zwei Gleichungen zwischen α, β, γ, welche der Evolute angehören. Aber man darf nicht übersehen, daß diese beiden

Gleichungen Differentialgleichungen sein werden. Sie geben also nicht eine bestimmte Evolute, sondern sprechen nur auf eine allgemeine Weise die geometrischen Merkmale aus, welche allen Evoluten der gegebenen Curve eigen sind, deren Ort die mehrgedachte abwickelbare Fläche, und deren Anzahl unendlich ist. Was die Aufsuchung der endlichen Gleichungen einer bestimmten Evolute selbst betrifft, die etwa durch einen willkürlich gewählten Punkt derjenigen Fläche gehen soll, welche sie sämmtlich in sich enthält, so hängt dieselbe von der Integralrechnung ab.

Wenn man sich übrigens die vorgelegte Curve, so wie die abwickelbare Fläche, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte ihrer osculatorischen Kugeln ist, im Raume als vorhanden denkt, so ist es leicht, auf dieser Fläche beliebige Evoluten der Curve graphisch herzustellen. Man befestigt nämlich einen Faden in einem Punkte l der Curve, und gibt demselben, indem man ihn gespannt hält, eine solche Lage, daß er die Fläche berührt; dieses wird in irgend einem Punkte λ derjenigen geradlinigen Kante dieser Fläche geschehen, welche in der Normalebene der Curve im Punkte l enthalten ist. Wenn man nun den Faden auf die Fläche niederlegt, indem man ihn fortwährend gespannt hält, so wird die dadurch auf der Fläche zu Stande kommende Linie die gesuchte Evolute sein. Sie ist überdies eine Linie des kürzesten Abstandes auf der abwickelbaren Fläche; wollte man diese Fläche abwickeln, d. h. in eine Ebene ausbreiten, so würde jene Linie sich darin als eine gerade Linie darstellen.

§. 245. Die graphische Herstellung einer Evolute kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden. Es seien l, m, n 2c. mehrere auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve. Hat man einen ersten Halbmesser λl gezogen, so lege man eine Ebene durch diesen Halbmesser

und das Element lm der Curve, und bezeichne den Punkt μ, in welchem diese Ebene diejenige geradlinige Kante der abwickelbaren Fläche schneidet, welche in der Normalebene der Curve im Punkte m enthalten ist. Sodann ziehe man den Halbmesser μm, lege eine zweite Ebene durch diesen Halbmesser und das Element mn der Curve, und bezeichne den Punkt ν, in welchem diese Ebene diejenige geradlinige Kante der abwickelbaren Fläche schneidet, welche in der Normalebene der Curve im Punkte n enthalten ist. Fährt man auf diese Weise fort, so geben die Punkte λ, μ, ν 2c., die gesuchte Evolute.

Man nehme ferner an, die abwickelbare Fläche werde in eine Ebene ausgebreitet. Alle Normalebenen werden dabei auf einander fallen, indem sie sich um ihre auf einander folgenden Durchschnittslinien drehen, und in Folge dieses Zusammenfallens wird sich die gegebene Curve auf einen einzigen Punkt reduciren, der mit M bezeichnet werden mag. Denn der Bogen lm dieser Curve steht rechtwinklig auf der Normalebene, welche durch den Punkt l geht; folglich werden beim Zusammenfallen dieser Normalebene mit der folgenden die Punkte l und m einander decken. Ebenso steht der Bogen mn der Curve rechtwinklig auf der Normalebene, welche durch den Punkt m geht; folglich werden beim Zusammenfallen dieser Normalebene mit der folgenden die Punkte m und n einander decken. Und so fort. Daraus folgt weiter, daß die Halbmesser λl, μm, νn, 2c. gleichfalls auf einander fallen und sich zu einer einzigen geraden Linie vereinigen werden, weil sie sich gegenseitig schneiden, und daß sie sämmtlich durch den Punkt M gehen müssen. Also alle möglichen Evoluten der gegebenen Curve werden, durch das in Rede stehende Zusammenfallen, zu geraden Linien, die sich in dem Punkte M vereinigen, auf welchen sich die Curve selbst reducirt hat; und dieses stimmt mit der Aussage des vorigen Paragraphen.

§. 246. Die Mittelpunkte der ersten Krümmung der gegebenen Curve, welche in den §§. 236 ꝛc. bestimmt worden sind, liegen nothwendig auf der abwickelbaren Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte aller osculatorischen Kugeln ist. Denkt man sich nun den Inbegriff aller Krümmungsebenen der gegebenen Curve, so bilden dieselben durch ihre auf einander folgenden Durchschnittslinien eine neue abwickelbare Fläche, welche die frühere aus den Durchschnittslinien der auf einander folgenden Normalebenen hervorgegangene abwickelbare Fläche unter rechten Winkeln trifft. Die Durchschnittslinie dieser beiden Flächen ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung.

Diese Linie ist nicht allgemein eine Evolute der gegebenen Curve. Denn es seien l, m, n drei auf einander folgende Punkte der gegebenen Curve, und λ, μ, ν die drei entsprechenden Punkte der Curve, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung ist; mithin $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$ die Krümmungshalbmesser, welche zu den Punkten l, m, n der gegebenen Curve gehören. Wenn nun die Linie $\lambda\mu\nu$ ꝛc. eine Evolute von lmn ꝛc. wäre, so müßte der Bogen $\lambda\mu$ in der Verlängerung des Halbmessers $l\lambda$ liegen, ebenso der Bogen $\mu\nu$ in der Verlängerung des Halbmessers $m\mu$, u. s. f.; oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Halbmesser $m\mu$ müßte die Verlängerung des Halbmessers $l\lambda$ treffen, ebenso der Halbmesser $n\nu$ die Verlängerung des Halbmessers $m\mu$, u. s. f. Dieses könnte aber nur geschehen, wenn je zwei der auf einander folgenden Halbmesser $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, ꝛc. in einerlei Ebene enthalten wären, was im allgemeinen nicht der Fall ist, weil jeder dieser Halbmesser in einer von den Krümmungsebenen liegt, die den Punkten l, m, n ꝛc. der gegebenen Curve angehören. Die Krümmungshalbmesser $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, ꝛc. können nur dann einander treffen und durch ihre auf einander folgenden Durchschnitte

eine Evolute bilden, wenn die gegebene Curve eine ebene Curve ist, in welchem Falle sämmtliche Krümmungsebenen mit der Ebene der Curve zusammenfallen.

Die Richtigkeit der vorstehenden Bemerkung wird noch einleuchtender, wenn man wieder das Verfahren des §. 245 zu Hülfe nimmt. Jeder Halbmesser der ersten Krümmung der gegebenen Curve steht rechtwinklig auf der zugehörigen geradlinigen Kante der abwickelbaren Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist; wenn man also, wie oben, die Normalebenen auf einander fallen läßt, so werden jener Halbmesser und jene Kante, nach wie vor, einander unter rechten Winkeln schneiden. Die Halbmesser $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$, 2c. der ersten Krümmung der gegebenen Curve sind mithin, nach dem Zusammenfallen der Normalebenen, nichts anderes als Perpendikel aus dem Punkte M auf die auf einander folgenden Durchschnittslinien der Normalebenen. Folglich können diese Halbmesser nicht in eine einzige gerade Linie zusammenfallen (welches nöthig wäre, wenn die Punkte λ, μ, ν 2c. einer Evolute angehören sollten), ausgenommen dann, wenn die genannten Durchschnittslinien mit einander parallel sind; dieses kann aber nur stattfinden, wenn alle Krümmungsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die gegebene Curve eine ebene Curve ist.

§. 247. Wenn der Halbmesser ϱ und die Coordinaten des Mittelpunkts α, β, γ einer Kugel den drei Gleichungen Genüge leisten

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = \varrho^2 \qquad (A)$$

$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy + (\gamma - z)\,dz = 0 \qquad (B)$$

$$ds^2 - (\alpha - x)\,d^2x - (\beta - y)\,d^2y - (\gamma - z)\,d^2z = 0 \qquad (C)$$

so geht diese Kugel nach §. 235 mit einer gegebenen Curve von doppelter Krümmung in demjenigen Punkte dieser Curve, welchem die Coordinaten x, y, z angehören, eine Berührung der zweiten Ordnung ein. Da diese drei Gleichungen

die vier Größen α, β, γ und ϱ nicht vollständig bestimmen, so gibt es für den in Rede stehenden Punkt der gegebenen Curve eine unendliche Menge von osculatorischen Kugeln. Die Mittelpunkte aller dieser Kugeln liegen in einer geraden Linie, welche sich durch den Durchschnitt zweier Normalebenen ergibt, entsprechend den beiden Punkten der Curve, deren Coordinaten sind x, y, z und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Die Gleichungen (B) und (C) gehören resp. diesen beiden Ebenen an.

Wenn man die Operation fortsetzt, durch welche die beiden Gleichungen (B) und (C) aus der Gleichung (A) hergeleitet worden sind, d. h. wenn man die Gleichung (C) in Bezug auf x, y, z, als Veränderliche, differentiirt, so erhält man eine vierte Gleichung

$$3\,ds\,d^2s-(\alpha-x)\,d^3x-(\beta-y)\,d^3y-(\gamma-z)\,d^3z=0, \quad \text{(D)}.$$

welche in Verbindung mit den vorhergehenden die Größen α, β, γ und ϱ vollständig bestimmt. Die Kugel, für welche die Coordinaten des Mittelpunkts α, β, γ den drei Gleichungen (B), (C) und (D) Genüge leisten, wird mit der gegebenen Curve in demjenigen Punkte derselben, dessen Coordinaten x, y, z sind, eine Berührung der dritten Ordnung eingehen.

Man kann überdies bemerken, daß die Mittelpunkte aller Kugeln, welche mit der gegebenen Curve eine Berührung der dritten Ordnung eingehen, auf der Rückkehrkante der Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist, liegen müssen, welche Kante durch die auf einander folgenden Durchschnitte der geraden Linien gebildet wird, deren Ort diese Fläche ist. Denn die drei Gleichungen (B), (C), (D) gehören, wenn man in ihnen α, β, γ als die Veränderlichen ansieht, den drei Normalebenen der gegebenen Curve an, entsprechend den drei Punkten dieser

Curve, deren Coordinaten resp. sind x, y, z; $x+dx, y+dy, z+dz$; und $x+2dx+d^2x$, $y+2dy+d^2y$, $z+2dz+d^2z$. Das System der beiden Gleichungen (B) und (C) gehört also der Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen, und das System der beiden Gleichungen (C) und (D) gehört der Durchschnittslinie der zweiten und dritten Ebene an. Diese drei Gleichungen in Verbindung mit einander geben also denjenigen Punkt, welcher diesen beiden Durchschnittslinien gemeinschaftlich ist, d. h. einen Punkt der vorhin genannten Rückkehrkante. Wenn man aus den Gleichungen (B), (C), (D) mit Zuziehung der beiden Gleichungen der gegebenen Curve von doppelter Krümmung die Größen x, y, z eliminirt, so werden die beiden übrigbleibenden Gleichungen zwischen α, β, γ dieser Rückkehrkante angehören.

§. 248. Eine jede Curve von doppelter Krümmung und die Rückkehrkante derjenigen abwickelbaren Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte ihrer osculatorischen Kugeln ist, haben eine Beziehung auf einander, welche hier zum Schluß noch angemerkt werden möge. Man bemerke nämlich, 1) daß je zwei auf einander folgende Tangenten der Rückkehrkante rechtwinklig stehen auf den beiden auf einander folgenden entsprechenden Krümmungsebenen der gegebenen Curve, da jene Tangenten nichts anderes sind, als die Durchschnittslinien der Normalebenen dieser Curve; 2) daß je zwei auf einander folgende Krümmungsebenen der Rückkehrkante rechtwinklig stehen auf den beiden auf einander folgenden entsprechenden Tangenten der gegebenen Curve, da jene Krümmungsebenen nichts anderes sind, als die Normalebenen dieser Curve. Sodann folgt, 1) daß der Winkel ω (§. 238) zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten der gegebenen Curve, gleich ist dem Winkel zwischen den beiden auf einander folgenden entsprechenden Krümmungsebenen der Rückkehrkante derjenigen Fläche, welche der Ort der Mittel-

punkte der osculatorischen Kugeln ist; und 2) daß der Winkel Ω (§. 239) zwischen zwei auf einander folgenden Krümmungsebenen der Curve, gleich ist dem Winkel zwischen den beiden auf einander folgenden entsprechenden Tangenten dieser Rückkehrkante. Diese Sätze hat Fourier gegeben.

Beispiel.

§. 249. Man betrachte die Curve, welche mit dem Namen Schraubenlinie bezeichnet wird, und auf der Oberfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis einen Zug bildet, der sämmtliche Seitenlinien des Cylinders unter gleichen Winkeln durchschneidet. Es sei R der Halbmesser des Cylinders, dessen Achse mit der Achse der z zusammenfallen mag, und a bezeichne die trigonometrische Tangente des constanten Winkels, welchen jedes Element der Curve mit der Ebene xy einschließt. Außerdem werde mit t der Winkel bezeichnet, welcher zwischen der Ebene xz und demjenigen Halbmesser des Cylinders enthalten ist, welcher dem Punkte der Schraubenlinie zugehört, dessen Coordinaten x, y, z sind. Die Entstehung der Curve gibt sodann

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = Rat,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Curve in der Achse der x beginne. Man erhält daraus als Gleichungen der Projectionen der Schraubenlinie auf die Coordinatenebenen

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = Ra \,.\, \text{arc}\cos\frac{x}{R}, \quad z = Ra \,.\, \text{arc}\sin\frac{y}{R}.$$

Will man nun zunächst die Lage der Tangente in einem beliebigen Punkte der Curve bestimmen, so hat man aus den ersteren Gleichungen

$$dx = -R\sin t \,.\, dt, \quad dy = R\cos t \,.\, dt, \quad dz = Ra \,.\, dt,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tang t}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{\sin t};$$

und substituirt man diese Werthe in die Formeln des §. 223, so kommt

$$\cos\alpha = -\frac{\sin t}{\sqrt{1+a^2}},\quad \cos\beta = \frac{\cos t}{\sqrt{1+a^2}},\quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

oder wenn man will

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{y}{R},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{x}{R},\quad \cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Hiernach werden die Gleichungen der Tangente

$$y-y' = -\frac{1}{\operatorname{tang} t}(x-x'),\quad z-z' = -\frac{a}{\sin t}(x-x'),$$

$$z-z' = \frac{a}{\cos t}(y-y');$$

und die Gleichung der Normalebene wird

$$\sin t.(x-x') - \cos t.(y-y') - a(z-z') = 0,$$

wo x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunkts bedeuten, und t die Neigung desjenigen Halbmessers, welcher diesem Punkte zugehört, gegen die Achse der x. Alle Normalebenen bilden mit der Ebene xy einerlei Winkel.

§. 250. Ferner erhält man für die Bestimmung der Krümmungsebene und des Krümmungshalbmessers aus den vorigen Ausdrücken

$$dx = -R\sin t.dt,\quad dy = R\cos t.dt,\quad dz = Ra.dt,$$

indem man t als unabhängige Veränderliche ansieht

$$d^2x = -R\cos t.dt^2,\quad d^2y = -R\sin t\,dt^2,\quad d^2z = 0;$$

$$d^3x = R\sin t.dt^3,\quad d^3y = -R\cos t\,dt^3,\quad d^3z = 0;$$

und mithin

$$ds = \sqrt{1+a^2}.Rdt,\quad d^2s = 0;$$

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{\sin t}{\sqrt{1+a^2}},\quad \frac{dy}{ds} = \frac{\cos t}{\sqrt{1+a^2}},\quad \frac{dz}{ds} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Demnach gibt der Ausdruck für den Halbmesser ϱ der ersten Krümmung, nach §. 236, hier

$$\varrho = (1 + a^2) R,$$

und die Lage dieses Halbmessers wird nach §. 237 festgelegt durch die Werthe

$$\cos\lambda = -\cos t, \quad \cos\mu = -\sin t, \quad \cos\nu = 0.$$

Man erkennt hieraus, daß der Halbmesser der ersten Krümmung für jeden Punkt der Curve, seiner Lage nach, mit dem Halbmesser des Cylinders für diesen Punkt zusammenfällt. Alle Mittelpunkte der ersten Krümmung liegen mithin in einer Schraubenlinie, welche die nämliche Achse und die nämliche Steigung besitzt wie die gegebene Schraubenlinie, aber sich auf einem Cylinder befindet, dessen Halbmesser ist a^2R.

Die Gleichung der Krümmungsebene, §. 233, wird

$$a \sin t \,.\, (x - x') - a \cos t \,.\, (y - y') + z - z' = 0.$$

Alle Krümmungsebenen bilden mit der Ebene xy einerlei Winkel.

Der Ausdruck für den Halbmesser P der zweiten Krümmung, §. 239, gibt

$$P = \frac{1 + a^2}{a} R, \quad \text{woraus } P = \frac{\varrho}{a},$$

und da die Richtung dieses Halbmessers rechtwinklig auf der Krümmungsebene steht, so werden die Cosinus der Winkel, welche derselbe mit den Achsen der x, y, z einschließt, resp. ausgedrückt werden durch

$$\frac{a \sin t}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad -\frac{a \cos t}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Diese Ausdrücke zeigen eine Richtung an, welche zu gleicher Zeit rechtwinklig steht auf der Tangente der Curve, deren Festlegung durch die Winkel α, β, γ geschieht, und auf dem

Halbmesser der ersten Krümmung, zu dessen Festlegung die Winkel λ, μ, ν dienen.

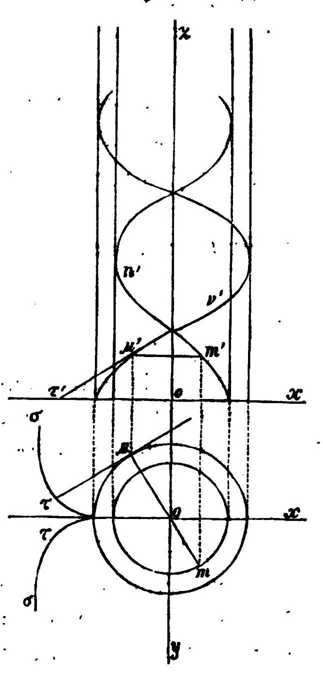
Wenn man mit ψ den constanten Winkel bezeichnet, den die Tangente der Curve mit der Ebene xy einschließt, so hat man $\tang \psi = a$, und man kann einfacher schreiben

$$\cos\alpha = -\cos\psi \sin t,\ \cos\beta = \cos\psi\cos t,\ \cos\gamma = \sin\psi,$$

$$\varrho = \frac{R}{\cos\psi^2},\quad P = \frac{R}{\sin\psi\ \cos\psi}.$$

§. 251. Man betrachte jetzt die abwickelbare Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln der gegebenen Curve ist. Der Kreis, dessen Halbmesser $om = R$ ist, Fig. 43, sei die Basis der gegebenen Schraubenlinie, welche in $m'n'$ auf die Ebene xz projicirt erscheint. Der Kreis, dessen Halbmesser $o\mu = a^2 R$ ist (die Figur ist für den Fall gezeichnet, wo $a > 1$ genommen wird), stellt die Basis derjenigen Schraubenlinie dar, welche den geometrischen Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung bildet, und in $\mu'\nu'$ auf die Ebene xz projicirt ist. Die Linien $m\mu$ und $m'\mu'$ sind die beiden Projectionen des Halbmessers der ersten Krümmung, welche dem Punkte der gegebenen Schraubenlinie zugehören, dessen Projectionen sich in m und m' finden. Nun ist die abwickel-

Fig. 43.



bare Fläche, welche die Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln in sich enthält, nichts anderes als der Ort der auf einander folgenden Durchschnittslinien der Normalebenen, welche man durch sämmtliche Punkte der gegebenen Schraubenlinie legen kann. Und da alle diese Ebenen einerlei Winkel mit der Ebene xy einschließen, so ist der Ort ihrer auf einander folgenden Durchschnittslinien eine Schraubenfläche, wenn man diese Benennung für jede Fläche gebraucht, welche durch die Bewegung einer Linie oder einer andern Fläche hervorgebracht wird, indem ein Punkt dieser Linie oder Fläche eine Schraubenlinie beschreibt und alle übrigen Punkte derselben sich um die Achse dieser Schraubenlinie drehen. Ferner besitzen die in Rede stehenden Durchschnittslinien sämmtlich einen Punkt in der in $\mu'\nu'$ projicirten Schraubenlinie, welche der Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung der gegebenen Schraubenlinie ist; sie bilden sämmtlich denselben Winkel mit der Ebene xy, und stehen rechtwinklig auf dem Halbmesser des Cylinders, auf welchem sich die in $\mu'\nu'$ projicirte Schraubenlinie befindet. Mithin sind sie nichts anderes als die Tangenten dieser Schraubenlinie, welche demnach zugleich der geometrische Ort ihrer auf einander folgenden Durchschnitte ist, d. h. die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche. In der Figur bezeichnen $\mu\tau$ und $\mu'\tau'$ die Projectionen der Tangente in dem Punkte μ,μ'. Die Punkte τ, in welchen diese Tangenten die Ebene xy treffen, bilden in dieser Ebene eine aus zwei Armen $\tau\sigma$, $\tau\sigma$ zusammengesetzte Curve, welche Evolventen desjenigen Kreises sind, dessen Halbmesser $o\mu$ ist. Aus dem Gesagten erkennt man, daß die abwickelbare Fläche, welche der Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist, durch ihre Rückkehrkante, oder durch die den Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung bildende Schraubenlinie, in zwei von einander verschiedene Flächentheile zerlegt wird, welche nicht in

das Innere des Cylinders vom Halbmesser $o\mu$ eintreten, dagegen sich außerhalb dieses Cylinders, dessen Oberfläche sie unter rechten Winkeln treffen, nach allen Seiten ins Unendliche erstrecken.

Die Gleichung der Fläche, welche den Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln bildet, kann man nach der Bemerkung am Schlusse des §. 242 finden. Setzt man nämlich in die Gleichungen

$$(\alpha - x)\, dx + (\beta - y)\, dy + (\gamma - z)\, dz = 0$$
$$ds^2 - (\alpha - x)\, d^2x - (\beta - y)\, d^2y - (\gamma - z)\, d^2z = 0,$$

welche zu zwei auf einander folgenden Normalebenen der gegebenen Schraubenlinie gehören, statt x, y, z und ihre Differentiale die obigen Werthe durch t, so kommt

$$\alpha \sin t - \beta \cos t = a\,(\gamma - Rat)$$
$$\alpha \cos t + \beta \sin t = - a^2R.$$

Das System dieser beiden Gleichungen stellt augenscheinlich die Durchschnittslinie von zwei auf einander folgenden Normalebenen dar, entsprechend dem in m,m' projicirten Punkte der gegebenen Schraubenlinie; d. h. die Tangente an dem in μ,μ' projicirten Punkte derjenigen Schraubenlinie, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung ist. Die zweite Gleichung, welche nur α und β enthält, ist die Gleichung der Projection dieser Tangente auf die Ebene xy; und man erkennt leicht, daß sie der Tangente $\mu\tau$ angehört, welche im Punkte μ an den Kreis, welcher $o\mu$ oder a^2R zum Halbmesser hat, gelegt worden ist, übereinstimmend mit dem oben Gesagten.

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen t eliminirt, so wird das Resultat allen Durchschnittslinien dieser Art zukommen, oder, was dasselbe sagt, der abwickelbaren Fläche, welche der Ort dieser Durchschnittslinien ist. Um die Eli-

mination auszuführen, erhebe man beide Gleichungen zum Quadrat und addire sodann, wodurch man erhält

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^4R^2 + a^2\,(\gamma - Rat)^2.$$

Hieraus wird

$$t = \frac{\gamma}{aR} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2} - 1};$$

und setzt man diesen Werth in die zweite Gleichung, so kommt

$$\alpha\cos\left(\frac{\gamma}{aR}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2}-1}\right)+\beta\sin\left(\frac{\gamma}{aR}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^4R^2}-1}\right)+aR^2=0$$

als die gesuchte Gleichung der abwickelbaren Fläche.

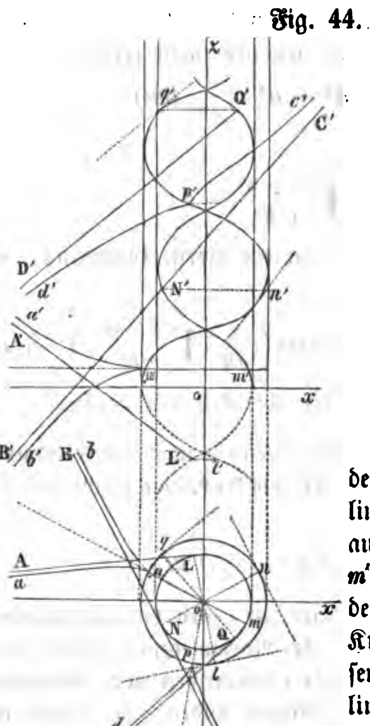
Man kann bemerken, daß, wenn man in der Gleichung $\alpha^2+\beta^2=a^4R^2+a^2(\gamma-Rat)^2$ die Annahme macht $\gamma=0$, das Resultat, nämlich

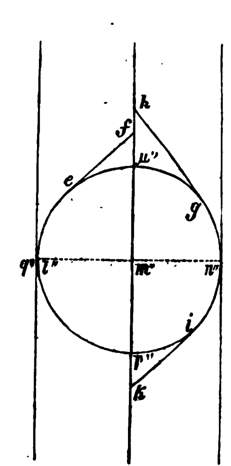
$$\alpha^2 + \beta^2 = (a^2\,R)^2 + (a^2\,Rt)^2,$$

den Punkten τ angehören wird, in denen die auf einander folgenden Durchschnittslinien der Normalebenen, welche den einzelnen Werthen des Winkels t entsprechen und zusammen genommen die abwickelbare Fläche bilden, die Ebene xy treffen. Nun bezeichnet $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ den geradlinigen Abstand der Punkte o und τ, während a^2R dargestellt wird durch $o\mu$; folglich muß der Abstand $\mu\tau$ gleich sein der Abwickelung des Bogens t in dem Kreise, dessen Radius $a^2\,R$ ist, oder die Curve τo muß eine Evolvente dieses Kreises sein, wie bereits oben gesagt worden ist.

§. 252. Will man endlich die Evoluten der Schraubenlinie finden, welche in der so eben nachgewiesenen abwickelbaren Fläche enthalten sind, so gelangt man dazu auf folgende Weise. Es sei wie vorhin ein beliebiger Punkt

Fig. 44.





der gegebenen Schraubenlinie projicirt in *m*, Fig. 44, auf die Ebene *xy*, und in *m'* auf die Ebene *xz*, und der Mittelpunkt der ersten Krümmung, welcher zu diesem Punkte der Schraubenlinie gehört, projicirt in μ und μ'. Man betrachte den Inbegriff der Normalebenen der gegebenen Schraubenlinie, und nehme an, daß alle diese Ebenen, indem man sie um ihre auf einander folgenden Durchschnittslinien sich drehen läßt, auf die Normalebene des Punktes *m*, *m'* niedergelegt werden. Nach §. 245 wird sich die gegebene Schraubenlinie bei diesem Zusammenfallen der Normalebenen auf einen einzigen Punkt *m''* reduciren, und da alle Abstände *m*μ unter einander gleich sind, so wird sich gleichzeitig die Schraubenlinie, welche der Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung ist, als eine Kreisperipherie darstellen, welche

aus dem Punkte m'' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $m''\mu''=m\mu$ beschrieben worden ist. Alle Windungen dieser letzteren Schraubenlinie finden sich auf der genannten Kreisperipherie abgewickelt und nach ihrer wahren Länge niedergelegt.

Gesetzt nun, man wollte diejenige Evolute bestimmen, deren erster Punkt in μ und μ' projicirt, und in μ'' auf die Ebene niedergelegt erscheint. Nach §. 245 wird diese Evolute in der Ebene durch die gerade Linie $m''\mu''$ dargestellt werden, welche nach beiden Seiten ohne Grenzen verlängert gedacht werden muß. Will man also einen beliebigen Punkt der Evolute selbst finden, so beachte man, daß die geradlinigen Kanten der abwickelbaren Fläche, d. h. die Tangenten derjenigen Schraubenlinie, welche der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte ist, beim Zusammenfallen der Normalebenen sich in Tangenten des Kreises verwandeln, dessen Halbmesser $m''\mu''$ ist. Wenn man mithin in dieser Schraubenlinie den Punkt aufsucht, welcher einem beliebig gewählten Punkte e der Kreisperipherie entspricht (d. h. den Punkt, welcher von dem Punkte μ,μ', auf der Schraubenlinie gemessen, einen Abstand gleich dem Kreisbogen $\mu''e$ besitzt); wenn man ferner in diesem Punkte eine Tangente an die Schraubenlinie legt, und auf dieser Tangente den Abstand ef abträgt, so hat man den gesuchten Punkt der Evolute.

Um auf die angegebene Weise zunächst den Arm der Evolute zu construiren, welcher vom Punkte μ,μ' ausgehend sich in dem oberen von den beiden Flächentheilen befindet, in welche die abwickelbare Fläche durch ihre Rückkehrkante oder durch den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Schraubenlinie zerlegt wird, ziehe man also alle Tangenten in demjenigen Theile der diesen Ort darstellenden Schraubenlinie, welcher in μl und $\mu'l'$ projicirt, und in $\mu''l''$ in die Ebene niedergelegt erscheint. Die Tangente im Punkte l'' der Kreisperipherie trifft nicht mehr die

verlängerte gerade Linie $m''\mu''$. Wenn also der Punkt l,l' der Schraubenlinie von dem Punkte μ,μ', auf dieser Schraubenlinie gemessen, einen Abstand gleich der Länge des Quadranten $\mu''el''$ besitzt, so ist man sicher, daß der in Rede stehende Arm der Curve, welcher in μa und $\mu'a'$ projicirt ist, in unendlicher Entfernung parallel mit der Tangente der Schraubenlinie im Punkte l,l' werden wird. Dieser Arm der Curve hat also zur Asymptote eine Linie LA, $L'A'$, welche parallel mit dieser Tangente durch den Punkt L,L' der gegebenen Schraubenlinie gelegt ist, der dem Punkte l,l' diametral gegenüberliegt. Der Punkt L,L' begränzt den Bogen mL, $m'L'$ der gegebenen Schraubenlinie, welcher durch die Abwickelung des Arms μa, $\mu'a'$ der Curve beschrieben werden kann.

Will man sodann den Arm der Evolute construiren, welcher von dem Punkte μ,μ' ausgehend, sich in dem untern von den beiden Flächentheilen der abwickelbaren Fläche befindet, so wird man dazu die Tangenten desjenigen Theils der Schraubenlinie anwenden, welcher in μn und $\mu'n'$ projicirt, und in $\mu''n''$ in die Ebene niedergelegt erscheint, indem man nämlich auf jeder Tangente eine Länge gh abwärts vom Berührungspunkte abträgt. Man erhält auf diese Weise den Arm $\mu b,\mu'b'$ der Curve. Und da die Tangente im Punkte n'' der Kreisperipherie nicht mehr die verlängerte gerade Linie $m''\mu''$ trifft, so folgt, daß wenn man auf der Schraubenlinie den Punkt n,n' angibt, dessen Abstand von dem Punkte μ,μ' gleich der Länge des Quadranten $\mu''gn''$ ist, die Curve $\mu b,\mu'b'$ in unendlicher Entfernung parallel mit der Tangente der Schraubenlinie im Punkte n,n' werden wird. Die Curve hat also zur Asymptote eine Parallele mit dieser Tangente durch den Punkt N,N' der gegebenen Schraubenlinie, welcher diametral dem Punkte n,n' gegenüberliegt. Der Punkt N,N' begränzt den Bogen mN,

$n'N'$ der gegebenen Schraubenlinie, welcher durch die Abwickelung des Armes μb, $\mu' b'$ der Curve beschrieben werden kann.

Der Punkt μ, μ', in welchem die beiden Arme μa, $\mu' a'$ und μb, $\mu' b'$ der Evolute sich vereinigen, ist ein Rückkehrpunkt dieser Curve.

Um die Construction der Evolute weiter fortzusetzen, und den Arm der Curve zu finden, aus dessen Abwickelung der Bogen oberhalb des Punktes N, N' der gegebenen Schraubenlinie hervorgehen kann, wird man Tangenten an denjenigen Theil np, $n'p'$ der den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildenden Schraubenlinie legen, welcher in $n''ip''$ in die Ebene niedergelegt worden ist, und sodann auf diesen Tangenten von unten nach oben, vom Berührungspunkte aus, die Längen ik abtragen. Nun ist klar, daß wenn der Bogen np, $n'p'$ der Schraubenlinie an Länge gleich dem Quadranten $n''ip''$ ist, die gedachte Operation den Arm pc, $p'c'$ der Curve geben wird, der den früheren völlig gleich ist, und zur Asymptote die Verlängerung NC, $N'C'$ der Linie $NB, N'B'$ hat.

Durch die nämliche Construction findet man sodann auch, mit Hülfe der Tangenten in demjenigen Theile pq, $p'q'$ der den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildenden Schraubenlinie, welcher in dem Quadranten $p''q''$ niedergelegt erscheint, den Arm pd, $p'd'$ der Curve, welcher sich in p, p' mit einem Rückkehrpunkte an den vorigen Arm anschließt. Und so fort.

Aus dem Vorstehenden erkennt man, daß die Evolute der gegebenen Schraubenlinie aus einer unendlichen Menge vollkommen gleicher Arme besteht, welche abwechselnd auf dem oberen und dem untern Flächentheile der abwickelbaren Fläche liegen, die der Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln ist. Jeder Arm steht mit dem vorhergehenden durch einen Rückkehrpunkt, und mit dem nachfolgenden durch

eine beiden gemeinschaftliche Asymptote in Verbindung. Die Rückkehrpunkte liegen sämmtlich auf der den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildenden Schraubenlinie, in Abständen von einander, gleich der Länge des Halbkreises, dessen Halbmesser gleich ist dem Krümmungshalbmesser $(1 + a^2) R$.

§. 253. Um auf die Schraubenlinie die Betrachtung des §. 247 anzuwenden, bemerke man, daß für diese Curve die drei Gleichungen (B), (C), (D) des angeführten Paragraphen, wenn man darin für x, y, z und ihre Differentiale ihre Werthe durch t setzt, sich resp. verwandeln in

$$\alpha \sin t - \beta \cos t = a(\gamma - Rat)$$
$$\alpha \cos t + \beta \sin t = -a^2 R$$
$$\alpha \sin t - \beta \cos t = 0,$$

welche Gleichungen sich auf die beiden folgenden reduciren

$$\alpha \cos t + \beta \sin t = -a^2 R \text{ und } \gamma = Rat.$$

Sie stellen augenscheinlich eine Schraubenlinie von dem Halbmesser $a^2 R$ dar, deren Steigung gleich der Steigung der gegebenen Schraubenlinie ist, während sie selbst dieser letzteren gegenüber liegt. Diese Merkmale gehören aber der im §. 250 gefundenen Curve an, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte der ersten Krümmung von der gegebenen Schraubenlinie war; und in der That hat sich schon im §. 251 gezeigt, daß diese Curve zugleich die Rückkehrkante der Fläche ist, welche den Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln darstellt. Also die Kugeln, deren Halbmesser die erste Krümmung der gegebenen Curve messen, und die im allgemeinen mit dieser Curve nur eine Berührung der zweiten Ordnung eingehen, haben, in dem besonderen Falle einer Schraubenlinie, mit dieser eine Berührung der dritten Ordnung.

Was die Sätze des §. 248 betrifft, so hat man allgemein $\omega = \frac{ds}{\varrho}$, $\Omega = \frac{ds}{P}$, und wenn man hierin für ds, ϱ und

P die Werthe aus §. 250 setzt, so wird für die gegebene Schraubenlinie

$$\omega = \frac{dt}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \Omega = \frac{a\,dt}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Aber die Rückkehrkante der Fläche, welche den Ort der Mittelpunkte der osculatorischen Kugeln bildet, ist hier eine zweite Schraubenlinie, deren Halbmesser a^2R und deren Steigung gleich derjenigen der gegebenen Schraubenlinie ist. Nennt man also a' den Werth von a, welcher dieser zweiten Schraubenlinie entspricht, so muß man haben $a' = \frac{1}{a}$. Und wenn man in den vorigen Ausdrücken $\frac{1}{a}$ an die Stelle von a setzt, so verwandeln sich dieselben in

$$\omega = \frac{a\,dt}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \Omega = \frac{dt}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Also ist der Werth des Winkels ω der gegebenen Curve gleich dem Werthe des Winkels Ω der Rückkehrkante, und umgekehrt der Werth des Winkels Ω der Curve gleich dem Werthe des Winkels ω der Rückkehrkante; was mit den angezeigten Sätzen übereinstimmt.

XXIII. Integration der einfachsten Functionen von einer Veränderlichen.

§. 254. Eine Differentialfunction der ersten Ordnung von einer Veränderlichen x hat allgemein die Form

$$Xdx,$$

wo X irgend eine Function von x bedeutet. Diese Differentialfunction ist immer aus der Differentiation einer gewissen Function y der Veränderlichen x hervorgegangen, so daß man hat

$$dy = Xdx, \text{ und } \frac{dy}{dx} = X;$$

oder sie kann wenigstens immer wie das Resultat einer solchen Operation angesehen werden. Diejenige Operation nun, welche mit dem Namen der **Integration** bezeichnet wird, hat zu ihrem Gegenstande die Lösung der Aufgabe, die Function y zu finden, wenn das Differential Xdx gegeben ist; oder überhaupt eine Function von x zu finden, welche, differentiirt, den Ausdruck Xdx wieder hervorbringt.

Die Function y der Veränderlichen x, deren Differentiation das gegebene Differential Xdx liefert, wird das **Integral** dieses Differentials genannt. Man bezeichnet das Integral durch ein $\int$, vor Xdx gesetzt. So hat also die vorige Gleichung

$$dy = Xdx$$

zur unmittelbaren Folge

$$y = \int Xdx,$$

und umgekehrt. Man kann indessen sogleich bemerken, daß wenn man eine Function von x gefunden hat, deren Differentiation zum Resultat gibt Xdx, man zu dieser Function eine beliebige Constante C addiren darf, ohne daß sie aufhört Xdx als Differential zu geben. Denn das Differential einer Constante ist stets Null. Wenn also die gesuchte Function nur durch die einzige Bedingung bekannt ist, daß man durch ihre Differentiation Xdx als Resultat finden soll, so muß man, um ihren allgemeinen Ausdruck aufzustellen, in diesem Ausdrucke das constante und willkürliche Glied C mitbegreifen. Man schreibt deßhalb, indem unter y das

Integral der gegebenen Differentialfunction Xdx verstanden wird, allgemein

$$y = C + \int Xdx,$$

in welcher Gleichung $\int Xdx$ das unmittelbare Resultat der Integration, C dagegen die willkürliche Constante bedeutet.

Diese Constante C bleibt vollkommen willkürlich, so lange das Integral y nur durch die einzige Bedingung bestimmt wird, zu seinem Differential Xdx zu geben. Aber in allen Anwendungen der Integralrechnung finden sich jederzeit Bedingungen vor, durch welche man den Werth dieser Constante feststellen und mithin zu einem bestimmten Resultate gelangen kann.

§. 255. Nicht ohne Grund hat man den Anfangsbuchstaben des Wortes Summe ($\int$) gewählt, um durch Beifügung desselben zu dem Ausdrucke Xdx die Function zu bezeichnen, deren Differential Xdx ist. Jede Function kann nämlich wie die Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen ihres Differentials angesehen werden. Um dieses deutlich zu erkennen, nehme man die schon öfter benutzte Betrachtung der auf einander folgenden Werthe

$$x_0, x_0+\Delta x, x_0+2\Delta x, x_0+3\Delta x, \ldots . x_0+(n-1)\Delta x, x_0+n\Delta x$$

wieder auf, welche der unabhängigen Veränderlichen x beigelegt werden, indem Δx wie eine constante Differenz angesehen wird; so wie der entsprechenden Werthe einer Function y von dieser Veränderlichen

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots . y_{n-1}, y_n.$$

Bezeichnet man die Differenzen der auf einander folgenden Werthe von y mit Δy_0, Δy_1, Δy_2, ... Δy_{n-1}, so hat man

augenscheinlich (vorausgesetzt daß zwischen $x = x_0$ und $x = x_0 + n\Delta x$ die Function y keine unendlichen Werthe annimmt

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_{n-1}$$

welchen Ausdruck man auch schreiben kann

$$y_n = y_0 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Man nehme nun an, die Differenz Δx werde kleiner und kleiner, indem sie sich der Null nähert, und zugleich wachse die Zahl n in demselben Verhältniß, so daß $n\Delta x$ unverändert bleibt. Die Anzahl der Glieder, welche in der Klammer enthalten sind, wird alsdann fortwährend zunehmen, und der Werth irgend eines beliebigen $\frac{\Delta y_k}{\Delta x}$ unter diesen Gliedern wird immer näher dem Werthe des Differentialverhältnisses $\frac{dy}{dx}$ kommen, welcher dem Werthe $x_0 + k\Delta x$ der Veränderlichen x entspricht. Daraus folgt, daß mit dem Abnehmen von Δx die Größe

$$\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

sich einer bestimmten Gränze immer mehr nähern wird, welche die Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen darstellt, die das Differential $\frac{dy}{dx}\,dx$ der gegebenen Function nach und nach annimmt, wenn man die unabhängige Veränderliche x durch das constante und unendlich kleine Intervall dx von $x = x_0$ bis $x = x_0 + n\Delta x$ wachsen läßt. Man kann also schließen, daß man jederzeit von dem willkürlichen Werthe y_0 der Function zu einem anderen willkürlichen Werthe y derselben Function gelangt, indem man zu y_0 die Summe aller Werthe addirt, welche das Differential $\frac{dy}{dx}\,dx$

in dem Intervalle zwischen den Werthen x_0 und x, entsprechend den Werthen y_0 und y, nach einander annimmt.

Wenn man mithin wie oben, mit Xdx das Differential der Function y, d. h. $\frac{dy}{dx}dx$, bezeichnet, so kann man statt der vorigen Gleichung schreiben

$$y = y_0 + \int_{x_0} Xdx.$$

Das Zeichen $\int_{x_0}$ bedeutet hier, daß man die Summe von allen Werthen des Differentials Xdx zu nehmen hat, welche den Werthen x_0, $x_0 + dx$, $x_0 + 2dx$, $x_0 + 3dx$, 2c. entsprechen, bis zu demjenigen Werth $x_0 + (n-1)\,dx$, welcher dem Werthe x vorangeht, der dem Werthe y auf der linken Seite der Gleichung zugehört. Durch Angabe von x_0 unten am Integralzeichen $\int$ wird der besondere Werth von x hervorgehoben, welcher dem Werthe y_0 entspricht und von welchem ausgehend die Summe gebildet werden soll.

Die vorstehende Gleichung gilt, wie auch die einander zugehörigen Werthe x_0 und y_0 beschaffen sein mögen. Wenn aber bloß ein Differential Xdx gegeben ist, ohne Anzeige des besonderen Werths x_0 der unabhängigen Veränderlichen, von welchem ausgehend die Werthe dieses Differentials summirt werden sollen, oder des entsprechenden Werths y_0 der Function, so hat man kein Mittel zu ihrer Bestimmung in Händen. Betrachtet man also in der vorstehenden Gleichung die Function y wie der einzigen Bedingung unterworfen, daß Xdx ihr Differential sein soll, so muß man darin x_0 so wie y_0 wie vollkommen willkürlich ansehen. Es ist mithin überflüssig, den unbestimmten Werth von x, von welchem aus die Summe $\int Xdx$ genommen ist, besonders anzugeben, und man kann wie in dem vorigen Paragraphen schreiben

$$y = C + \int Xdx.$$

§. 256. Die Unbestimmtheit in dem Werthe des Integrals y und die Nothwendigkeit, den Ausdruck desselben durch Hinzufügung einer willkürlichen Constante zu vervollständigen, werden sehr einleuchtend, wenn man x wie die Abscisse einer ebenen Curve ansieht, deren Ordinate y darstellt. Die Gestalt dieser Curve ist vollkommen bestimmt sobald die Function y von x entwickelt oder unentwickelt vorliegt; dagegen wenn nur das Differential $dy = Xdx$ oder das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx} = X$ dieser Function gegeben ist, so verhält sich die Sache anders. Der Ausdruck dieses Differentialverhältnisses bestimmt nämlich bloß die Richtung der Tangente der Curve für jeden Punkt, der einem gegebenen Werthe von x zugehört. Nimmt man also an, eine Curve sei so gezeichnet, daß sie in allen ihren Punkten dieser Bedingung $\frac{dy}{dx} = X$ Genüge leistet, und verschiebt darauf die Curve, indem man ihre sämmtlichen Punkte Parallelen zur Achse der y beschreiben läßt, so wird sie in jeder Lage, die sie dabei einnehmen mag, noch immer derselben Bedingung genügen, und es wird sich kein Grund angeben lassen, weßhalb man irgend eine dieser Lagen allen übrigen vorziehen sollte.

Ferner ist klar, daß die Ordinate der Curve durch diejenige Function von x ausgedrückt werden muß, welche zum Differentialverhältniß X hat und durch $\int Xdx$ bezeichnet wird. Wollte man aber bei dieser Function stehen bleiben und bloß setzen $y = \int Xdx$, so würde man unter den in Rede stehenden Curven eine Wahl treffen, indem sodann einem bestimmten Werthe von x auch ein bestimmter Werth von y zugehören würde. Soll also, wie es nothwendig ist, das Integral eine eben so große Allgemeinheit und eine eben so umfassende Bedeutung besitzen, wie das gegebene

Differential, so muß man schreiben

$$y = C + \int Xdx,$$

wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Auf diese Weise kann der Ausdruck von y die Ordinate einer jeden der unzähligen Curven darstellen, für welche die Richtung der Tangente in jedem beliebigen Punkte durch den Ausdruck $\frac{dy}{dx} = X$ des Differentialverhältnisses der ersten Ordnung bestimmt wird.

§. 257. Wenn man jede Unbestimmtheit in Betreff der Curve, deren Ordinate durch die Function y ausgedrückt werden soll, will verschwinden lassen, so genügt dazu die Angabe irgend eines Punkts, durch welchen diese Curve hindurchgehen soll. Denn man überzeugt sich leicht, daß die Kenntniß eines einzigen Punkts einer Curve, so wie der Richtung der Tangente für jeden beliebigen Werth der Abscisse, hinreichend sind, um diese Curve in ihrer ganzen Erstreckung zu zeichnen. Nun fällt die Angabe eines Punkts einer Curve damit zusammen, daß zu einem gewissen Werthe x_0 von x ein gewisser Werth y_0 von y gehören soll. Macht man aber eine solche Annahme, so ist damit die willkürliche Constante C der Gleichung

$$y = C + \int Xdx$$

vollkommen bestimmt. Denn es sei P die Function von x, deren Differential Xdx ist, und P_0 derjenige Werth, welchen P für den Werth x_0 von x annimmt, so muß man haben

$$y_0 = C + P_0,$$

aus welcher Gleichung der Werth von C bestimmt werden kann.

Ueberhaupt ist die willkürliche Constante bestimmt, sobald bei der Angabe des Differentials Xdx, dessen Integral y man sucht, überdies noch festgestellt wird, daß einem gewissen

gegebenen Werthe a von x ein gleichfalls gegebener Werth b für y zugehören soll.

§. 258. Nachdem im Vorstehenden die Bedeutung der Operation, welche mit dem Namen der Integration bezeichnet wird, aus einander gesetzt worden ist, bleibt jetzt noch übrig die Hülfsmittel anzugeben, welche die Analysis darbietet, um diese Operation auszuführen, d. h. um diejenige endliche Function von x zu finden, deren Differentiation ein beliebig gegebenes Differential Xdx hervorbringt; oder, wenn man will, um diejenige primitive Function zu finden, von welcher eine gegebene Function X die derivirte Function oder das Differentialverhältniß der ersten Ordnung ist. Es muß indessen sogleich bemerkt werden, daß, während der Uebergang von einer gegebenen Function y zu ihrem Differential dy durch ein regelmäßiges Verfahren zu Stande kommt, welches immer zu dem gesuchten Resultate führt, die umgekehrte Operation dagegen oder die Rückkehr von dem Differential zu der ursprünglichen Function nur in ganz besonderen Fällen, und gewisser Maßen nur ausnahmsweise ausgeführt werden kann. Man kann nicht allgemein versichert sein, daß sich die primitive Function von x, welche einem gegebenen Differential Xdx entspricht, in einem endlichen Ausdrucke angeben lasse; und, wie sich in der Folge zeigen wird, so ist man nicht selten genöthigt, in Ermangelung dieses endlichen Ausdrucks zu Näherungsmethoden seine Zuflucht zu nehmen. Zunächst ist es übrigens von Wichtigkeit, die Hauptfälle zu kennen, in denen die Integration ausgeführt werden kann, so wie die Methoden, welche dabei zur Anwendung kommen.

§. 259. Es ist sogleich klar, daß man unmittelbar das Integral eines gegebenen Differentials angeben kann, wenn man in diesem Differential eines von denjenigen wiedererkennt, welche nach den Entwickelungen des II. und

III. Abschnitts den einfachen Functionen angehören. So sieht man leicht, daß

$dy = x^m dx$	gibt	$y = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$
$dy = \frac{dx}{x}$		$y = C + lx$
$dy = e^x dx$		$y = C + e^x$
$dy = a^x dx$		$y = C + \frac{a^x}{la}$
$dy = \sin x\, dx$		$y = C - \cos x$
$dy = \cos x\, dx$		$y = C + \sin x$
$dy = \frac{dx}{\cos x^2}$		$y = C + \operatorname{tang} x$
$dy = \frac{dx}{\sin x^2}$		$y = C - \cot x$
$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$		$y = C + \operatorname{arc} \sin x$
$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$		$y = C + \operatorname{arc} \cos x$
$dy = \frac{dx}{1+x^2}$		$y = C + \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$
$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$		$y = C + \operatorname{arc} \cot x.$

Die Gleichung $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ gilt im allgemeinen für alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen und selbst irrationalen Werthe des Exponenten m. Man kann als besondere Fälle, welche häufig vorkommen, herausheben

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Eine Ausnahme macht aber der einzige Fall, wo man hat $m = -1$, und wo die allgemeine Formel geben würde $\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0}$. Man darf hieraus nicht schließen, daß die Rech-

nung für das Integral der Differentialfunction $\frac{dx}{x}$ einen unendlich großen Werth liefert, welches ungereimt sein würde. Denn man darf nicht vergessen, daß dem Integral noch eine willkürliche Constante hinzugefügt werden muß; und da nichts hindert, dieser Constante einen unendlich großen negativen Werth beizulegen, so folgt bloß, daß der allgemeine Ausdruck $C+\frac{x^{m+1}}{m+1}$ für $m=-1$ ein unbestimmtes Resultat von der Form $\infty-\infty$ liefert. Bringt man aber diesen Ausdruck unter die Form $\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$, wo a eine Constante bedeutet, (was erlaubt ist,) und betrachtet ihn wie eine Function von m, welche $\frac{0}{0}$ wird für $m=-1$, so kann man seinen wahren Werth finden, wenn man die Regeln der §§. 94 rc. anwendet. Das Verhältniß der Differentiale von Zähler und Nenner des Bruchs in Bezug auf m ist nämlich $\frac{lx.x^{m+1}-la.a^{m+1}}{1}$, und gibt, wenn man darin $m=-1$ setzt, $lx-la$ als den Ausdruck der gesuchten Function. In der That weiß man durch die Differentialrechnung, daß $d.lx=\frac{dx}{x}$ ist, woraus folgt $\int\frac{dx}{x}=lx$, welchem Ausdrucke sodann noch eine willkürliche Constante beigefügt werden muß. Jene Unbestimmtheit in dem Werthe des Ausdrucks $C+\frac{x^{m+1}}{m+1}$ für $m=-1$ muß demnach lediglich als eine Anzeige angesehen werden, daß dieser Werth des Exponenten m eine Aenderung in der Beschaffenheit der Function nach sich zieht, welche das Integral darstellt.

§. 260. Was die zusammengesetzteren Differentialfunctionen betrifft, so kann man zu ihrer Integration verschiedene Wege einschlagen. Entweder 1) man sucht die gege-

bene Function in andere einfachere zu zerlegen, welche sich unter den vorhin aufgezählten Differentialfunctionen wiederfinden. Oder 2) man sucht durch Substitution einer anderen Veränderlichen statt x eine Form hervorzubringen, welche sich gleichfalls unter den Differentialen wiederfindet, deren primitive Functionen unmittelbar bekannt sind. Oder endlich 3) man sucht die Auffindung des verlangten Integrals abhängig zu machen von der Auffindung eines andern Integrals, welches leichter zu erhalten ist.

Letzteres ist der Gegenstand des Verfahrens, welches mit dem Namen der Integration durch Theile belegt wird und in der Integralrechnung eine sehr verbreitete Anwendung findet. Bekanntlich ist nämlich

$$d.uv = udv + vdu,$$

folglich umgekehrt*)

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

und hieraus schließt man

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Hat man also ein gegebenes Differential auf die Form udv gebracht, d. h. auf die Form eines Products aus der endlichen Function u der Veränderlichen x und der Differentialfunction dv derselben Veränderlichen, und setzt man überdies das Integral v dieser Differentialfunction als bekannt voraus, so ist die Aufsuchung des Integrals $\int udv$ zurückgeführt auf die des Integrals $\int vdu$. Die willkürliche Constante, welche man überall hinzufügen muß, ist in der vorstehenden Gleichung weggelassen.

§. 261. Um die Anwendung der Integration durch Theile an einem Beispiele zu zeigen, sei das Differential gegeben

---

*) Man sehe §. 262, 2).

$$dy = x \cos x\, dx.$$

Man zerlege dasselbe in die beiden Factoren x und $\cos x\, dx$, von denen der letztere zum Integral hat $\sin x$. Sodann wird nach der vorigen allgemeinen Formel

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx$$
$$= x \sin x + \cos x,$$

folglich nach Hinzufügung der willkürlichen Constante

$$y = C + x \sin x + \cos x.$$

Von der Richtigkeit dieses Resultats kann man sich leicht wieder durch Differentiation überzeugen.

Der Erfolg der Operation hängt wesentlich von einer angemessenen Wahl der beiden Factoren ab, in welche man das gegebene Differential zerlegt. Wollte man z. B. in dem vorigen Differential $x \cos x\, dx$ die beiden Factoren $\cos x$ und $x\, dx$ nehmen, von denen der letztere zum Integral hat $\frac{x^2}{2}$, so würde kommen

$$\int \cos x \,.\, x dx = \frac{x^2 \cos x}{2} - \int \frac{x^2}{2} (-\sin x\, dx)$$
$$= \frac{x^2 \cos x}{2} + \int \frac{x^2 \sin x\, dx}{2},$$

und man hätte mithin die Aufsuchung des verlangten Integrals zurückgeführt auf die Aufsuchung eines noch verwickelteren Integrals. Man muß also immer, wenn es überhaupt möglich ist, das gegebene Differential so zerlegen, daß die Integration des einen Factors und die Differentiation des andern einen einfacheren Ausdruck gibt, dessen Integral sich leicht angeben läßt.

§. 262. Die folgenden Bemerkungen können noch dazu dienen, die Ausführung der Integration gegebener Differentialfunctionen zu erleichtern.

1) Wenn ein Differential mit einem constanten Factor versehen ist, so geht dieser Factor auch in das Integral über; z. B. aus

$$dy = aXdx \quad \text{folgt} \quad y = C + a\int Xdx.$$

2) Wenn die gegebene Function eine Summe von mehreren Differentialen darstellt, so ist das gesuchte Integral gleich der Summe derjenigen Integrale, welche man aus diesen Differentialen einzeln genommen erhält; z. B. aus

$$dy = Xdx + X_1dx - X_2dx$$

ergibt sich

$$y = C + \int Xdx + \int X_1dx - \int X_2dx.$$

3) Wenn ein Differential die Form hat

$$f(X)dX$$

oder auf diese Form gebracht werden kann, wo X wie bisher eine beliebige Function der Veränderlichen x bedeutet, so kann man es genau so behandeln, als ob X eine unabhängige Veränderliche wäre. Wenn also etwa $F(x)$ die Function von x bezeichnet, deren Differential ist $f(x)\,dx$, d. h. wenn man hat

$$F(x) = \int f(x)dx,$$

so ist gleichfalls

$$F(X) = \int f(X)dX.$$

Es sei z. B. das Differential gegeben

$$dy = x^{m-1}\sin(a + bx^m)\,dx,$$

so kann man dasselbe auch schreiben

$$dy = \frac{1}{mb}.\sin(a + bx^m).mbx^{m-1}\,dx.$$

Nun ist $mbx^{m-1}\,dx$ das Differential der Function $a + bx^m$, welche unter dem Zeichen sin steht. Setzt man also $X = a + bx^m$, so hat man

$$dy = \frac{1}{mb} \sin X dX,$$

und dann ist das Integral

$$y = C - \frac{1}{mb} \cos X = C - \frac{1}{mb} \cos(a + bx^m),$$

wovon man sich auch wieder umgekehrt durch Differentiation überzeugen kann.

XXIV. Integration der rationalen ganzen und gebrochenen Functionen.

---

§. 263. Man versteht unter einer rationalen ganzen Function der Veränderlichen x jede Function, welche aus Gliedern besteht, in denen nur Potenzen dieser Veränderlichen mit ganzen Exponenten vorkommen. Von dieser Beschaffenheit ist die Differentialfunction

$$dy = (a + bx^m + cx^n + \text{2c.})\, dx,$$

worin a, b, c, 2c. beliebige Constanten und m, n, 2c. positive oder negative ganze Zahlen bedeuten. Eine solche Function kann immer integrirt werden, und ihr Integral ist augenscheinlich, vermöge der Entwickelungen des vorigen Abschnitts

$$y = C + ax + \frac{bx^{m+1}}{m+1} + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \text{2c.},$$

wo C die willkürliche Constante bezeichnet. Man muß nur beachten, daß, wenn der Exponent von x in einem der Glieder -1 wäre, also das Glied von der Form $\frac{h}{x}\,dx$, sein Integral alsdann sein würde $h\,.\,lx$.

Das vorstehende Differential kann übrigens noch auf dieselbe Weise integrirt werden, wenn die Exponenten m, n, 2c. beliebige nicht ganze Werthe haben.

§. 264. Wenn die Differentialfunction in der Form gegeben ist

$$(dy = a + bx^m + cx^n + \text{2c.})^r\,dx,$$

wo r eine positive ganze Zahl bedeutet, so kann man sie durch Entwickelung der angezeigten Potenz auf die vorige Form zurückbringen.

Aber wenn man einfach hat

$$dy = (a + bx)^r\,dx,$$

wofür man auch schreiben kann

$$dy = \frac{1}{b}\,(a + bx)^r\,bdx,$$

so bemerkt man leicht, daß bdx das Differential von $a + bx$ ist, also die vorgelegte Function sich in dem Falle des §. 262, 3) befindet. Setzt man also $X = a + bx$, so hat man

$$dy = \frac{1}{b}\,X^r dX$$

und daraus unmittelbar

$$y = C + \frac{1}{b}\,\frac{X^{r+1}}{r+1} = C + \frac{(a+bx)^{r+1}}{b(r+1)}.$$

Diese Integration bleibt wieder für alle Werthe von r, mit Ausnahme von -1, gültig.

Ebenso findet man aus der Gleichung

$$dy = (a + bx^m)^r\,x^{m-1}\,dx$$

durch eine ähnliche Bemerkung

$$y = C + \frac{(a+bx^m)^{r+1}}{bm(r+1)}.$$

§. 265. Die rationalen gebrochenen Functionen fallen unter die allgemeine Form

$$dy = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + f}{x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + t} dx,$$

worin $a, b, c, \ldots f$ und $p, q, \ldots t$ beliebige constante Coefficienten, und m und n positive ganze Zahlen bedeuten. Ueberdies kann man zum Behufe der Integration immer die Voraussetzung machen, es sei $m < n$. Denn wenn der Exponent m im Zähler den Exponenten n im Nenner übertrifft oder demselben gleich ist, so kann man auf dem gewöhnlichen Wege den Zähler durch den Nenner dividiren. Man verwandelt dadurch den gegebenen Bruch in eine ganze Function nebst einem angehängten neuen Bruche, in welchem der größte Exponent von x im Zähler wenigstens um Eins kleiner ist als der größte Exponent im Nenner. Die Integration der ganzen Function kann aber nach §. 263 ausgeführt werden; folglich reducirt sich die Integration des gegebenen Differentials immer auf den Fall, wo der Exponent m höchstens gleich $n-1$ ist.

Es sei nun allgemein

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

ein rationaler Bruch; $F(x)$ ein Polynom vom Grade n, von der Form $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + t$; und $f(x)$ ein anderes Polynom, höchstens vom Grade $n-1$. Man bilde die Gleichung

$$F(x) = 0$$

und löse dieselbe nach den bekannten Methoden auf, so daß alle reellen und imaginären Wurzeln in bestimmten Zahlen

vorliegen. Die reellen Wurzeln mögen mit a, a_1, a_2, ꝛc. und die imaginären Wurzeln mit $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, $\alpha_1 \pm \beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 \pm \beta_2\sqrt{-1}$, ꝛc. bezeichnet werden; also die einfachen Factoren, welche den reellen Wurzeln entsprechen, mit $x-a, x-a_1, x-a_2$, ꝛc., und die quadratischen Factoren, welche zu den imaginären Wurzelpaaren gehören, mit $(x-\alpha)^2+\beta^2$, $(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2$, $(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2$, ꝛc. Ferner werde zunächst angenommen, es seien gleiche Wurzeln nicht vorhanden. Sodann ist aus der Theorie der Gleichungen bekannt, daß das Polynom $F(x)$ stets gleich dem Producte aus den einfachen oder quadratischen Factoren ist, welche den Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ entsprechen; und man kann mithin immer setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{M_1x+N_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{M_2x+N_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2} + \text{ꝛc.},$$

wo A, A_1, A_2, ꝛc. M, M_1, M_2, ꝛc. N, N_1, N_2, ꝛc. Constanten bedeuten. Denn wenn man sämmtliche Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung auf einerlei Nenner bringt, so ist der gemeinschaftliche Nenner $F(x)$; der Zähler aber wird ein Polynom vom Grade $n-1$, und um dieses mit dem gegebenen Polynom $f(x)$ identisch zu machen, hat man n Gleichungen vom ersten Grade aufzustellen nöthig, d. h. eben so viele Gleichungen wie unbestimmte Constanten da sind. Der gegebene Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ findet sich auf diese Weise in eine Reihe von Partialbrüchen zerlegt, welche die Form $\frac{A}{x-a}$ oder $\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ besitzen. Was die Bestimmung der Constanten betrifft, welche die Zähler dieser Partialbrüche bilden, so gelangt man dazu zwar schon durch die Auflösung jener

n Gleichungen, durch die bekannten Methoden für Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Kürzer kommt man jedoch auf folgende Weise zum Ziele.

§. 266. Gesetzt es sei der Zähler A des ersten Partialbruchs $\frac{A}{x-a}$ zu bestimmen, und man setze zur Abkürzung

$$F(x) = (x-a) \, . \, \varphi(x),$$

indem man mit $\varphi(x)$ das Product aller Factoren des Polynoms $F(x)$ mit Ausnahme von $x-a$ bezeichnet. Statt der Gleichung des vorigen Paragraphen kann man alsdann schreiben

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\chi(x)$ eine ganze Function von x bedeutet. Daraus aber folgt

$$f(x) = A \frac{F(x)}{x-a} + \frac{\chi(x) . F(x)}{\varphi(x)}.$$

Läßt man nun $x=a$ werden, so wird der Bruch, welcher mit A multiplicirt ist, zu $\frac{0}{0}$, und gibt nach den Regeln des §. 94 2c. als wahren Werth $F'(a)$, während das folgende Glied zu Null wird. Man hat also

$$f(a) = A \, . \, F'(a) \quad \text{woraus} \quad A = \frac{f(a)}{F'(a)},$$

indem $F'(a)$ den Werth bezeichnet, welchen das Differentialverhältniß der ersten Ordnung von der Function $F(x)$ für $x=a$ annimmt. Es ist klar, daß die Zähler der übrigen Partialbrüche, deren Nenner den reellen Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ entsprechen, auf dieselbe Weise bestimmt werden, und daß man erhält

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)}, \quad A_2 = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)}, \text{ 2c.}$$

Es wird niemals vorkommen, daß die Werthe von

$F'(a)$, $F'(a_1)$, $F'(a_2)$, 2c. zu Null werden; denn dieses würde erfordern, daß unter den Wurzeln a, a_1, a_2, 2c. wenigstens zwei gleiche vorhanden wären, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 267. Die Zähler der Partialbrüche, welche den imaginären Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ entsprechen, können auf eine ähnliche Weise bestimmt werden. Es sei

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

ein solcher Bruch, so kann man demselben die Gestalt geben

$$\frac{P-Q\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{P+Q\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\frac{2P(x-\alpha)+2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

so daß man hat

$$M=2P,\quad N=-2P\alpha+2Q\beta.$$

Durch dieselbe Betrachtung wie vorhin gelangt man sodann zu dem Schlusse, daß die Größen P und Q der Gleichung genügen müssen

$$P-Q\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})},$$

welche Gleichung sich in zwei getrennte Gleichungen zerlegt, indem man die reellen Theile für sich und die imaginären Theile für sich einander gleichzusetzen hat, so daß daraus die beiden in Rede stehenden Größen vollständig bestimmt werden können. Ebenso findet man

$$P_1-Q_1\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})}{F'(\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1})},\quad P_2-Q_2\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})}{F'(\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1})},\text{2c.}$$

und sodann

$$M_1=2P_1,\quad N_1=-2P_1\alpha_1+2Q_1\beta_1,$$
$$M_2=2P_2,\quad N_2=-2P_2\alpha_2+2Q_2\beta_2,$$

und so fort.

§. 268. Wenn man zweitens annimmt, daß die im §. 265 aufgestellte Gleichung $F(x)=0$ mehrere gleiche Wurzeln besitzt, so bleibt das vorige Verfahren nicht mehr anwendbar, und man gelangt zur Zerlegung des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ auf folgende Weise. Es sei k die Anzahl der Wurzeln, welche gleich der reellen Wurzel $x=a$ angenommen werden, so kann man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-2}}+\dots$$
$$+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

wo A, A_1, A_2, $\dots A_{k-1}$ unbestimmte Constanten bedeuten; $\varphi(x)$ das Product aller Factoren des Nenners $F(x)$ mit Ausnahme des Factors $(x-a)^k$, so daß man hat $(x-a)^k\varphi(x)=F(x)$; und endlich $\chi(x)$ ein Polynom von geringerem Grade als $\varphi(x)$. Bringt man alle Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung auf einerlei Nenner, nämlich auf den Nenner $F(x)$, so ist klar, daß man beide Seiten der Gleichung identisch machen kann, wenn man die Constanten A, A_1, A_2, $\dots A_{k-1}$ angemessen bestimmt. Die Gleichung wird, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners, werden

$$f(x)=A\,\varphi(x)+A_1\,(x-a)\,\varphi(x)+A_2\,(x-a)^2\,\varphi(x)+\dots$$
$$\dots+A_{k-1}\,(x-a)^{k-1}\,\varphi(x)+(x-a)^k\chi(x).$$

Zur Bestimmung der Werthe der in Rede stehenden Constanten differentiire man diese Gleichung ein, zwei, drei 2c. Mal nach einander in Bezug auf x, und setze darauf in sämmtlichen Gleichungen $x=a$. Man erhält dadurch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f(a) &= A.\varphi(a)\\
f'(a) &= A.\varphi'(a) + A_1.\varphi(a)\\
f''(a) &= A.\varphi''(a) + A_1.2\varphi'(a) + A_2.2\varphi(a)\\
f'''(a) &= A.\varphi'''(a) + A_1.3\varphi''(a) + A_2.6\varphi'(a) + A_3.6\varphi(a)\\
f^{IV}(a) &= A.\varphi^{IV}(a) + A_1.4\varphi'''(a) + A_2.12\varphi''(a) + A_3.24\varphi'(a)\\
&\quad + A_4.24\varphi(a)
\end{aligned}
$$

ꝛc.,

aus denen die Werthe von $A, A_1, A_2, \ldots A_{k-1}$ successiv berechnet werden können. Diese Werthe hängen ab, wie man sieht, von den auf einander folgenden derivirten Functionen der Function $\varphi(x)$, welche aus der Division des Nenners $F(x)$ durch $(x-a)^k$ gefunden werden kann. Will man diese Function aber nicht berechnen, so kann man zu der Gleichung

$$F(x) = (x-a)^k \varphi(x)$$

zurückgehen, und aus derselben die derivirten Functionen der höheren Ordnungen von der Function $F(x)$ entwickeln. Der allgemeine Ausdruck für die derivirte Function von der Ordnung u wird nämlich

$$
\begin{aligned}
x) = {} & k(k-1)(k-2)\ldots(k-u+1)(x-a)^{k-u}\,\varphi(x)\\
+ {} & u.k(k-1)(k-2)\ldots(k-u+2)(x-a)^{k-u+1}\,\varphi'(x)\\
+ {} & \frac{u(u-1)}{2}.k(k-1)(k-2)\ldots(k-u+3)(x-a)^{k-u+2}\,\varphi''(x)\\
+ {} & \frac{u(u-1)(u-2)}{2.3}.k(k-1)(k-2)\ldots(k-u+4)(x-a)^{k-u+3}\,\varphi'''(x)\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ {} & (x-a)^k\,\varphi^{(u)}(x).
\end{aligned}
$$

Setzt man also $x = a$ in den derivirten Functionen der Ordnungen $k, k+1, k+2$, ꝛc., so kommt

$$F^{(k)}\ (a) = k(k-1)(k-2)\dots 2.1.\ \varphi(a)$$
$$F^{(k+1)}(a) = (k+1).k(k-1)(k-2)\dots 2.1.\ \varphi'(a)$$
$$F^{(k+2)}(a) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.k(k-1)(k-2)\dots 2.1.\varphi''(a)$$
$$F^{(k+3)}(a) = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{2.3}.k(k-1)(k-2)\dots 2.1.\varphi'''(a)$$

2c.,

und aus diesen Gleichungen kann man die Größen $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, 2c. durch die Werthe bestimmen, welche die derivirten Functionen der Ordnungen k, $k+1$, $k+2$, 2c. des Nenners $F(x)$ für den Werthen $x=a$ annehmen.

§. 269. Wenn in der Gleichung $F(x)=0$ noch eine zweite Gruppe gleicher Wurzeln vorkommt, z. B. k Wurzeln gleich a_1, so wird man ebenso schließen, daß die Anwesenheit des Factors $(x-a_1)^k$ in dem Polynom $F(x)$ bei der Zerlegung des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ die folgende Reihe von Partialbrüchen nach sich zieht

$$\frac{A}{(x-a_1)^k}+\frac{A_1}{(x-a_1)^{k-1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{k-2}}+\dots+\frac{A_{k-1}}{x-a_1}.$$

Zur Berechnung der Constanten A, A_1, A_2, ... A_{k-1} gelten hier wieder die vorhin entwickelten Formeln, wenn man in denselben unter $\varphi(x)$ den Quotienten der Division von $F(x)$ durch den Factor $(x-a_1)^k$ versteht. Dieselbe Betrachtung würde sich wiederholen, wenn eine noch größere Anzahl vielfacher Wurzeln vorhanden wäre.

§. 270. Die vorstehenden Entwickelungen kann man leicht auch auf denjenigen Fall ausdehnen, wo die Gleichung $F(x)=0$ vielfache imaginäre Wurzeln besitzt. Denn es sei $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k$ ein Factor des Polynoms $F(x)$, und man wolle die Partialbrüche bestimmen, zu denen die Gegenwart dieses Factors Anlaß gibt, so wird man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} + \frac{M_1x+N_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}} + \frac{M_2x+N_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-2}}$$
$$+ \ldots + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\varphi(x)$ das Product aller Factoren des Polynoms $F(x)$ mit Ausnahme des Factors $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k$ bedeutet. Bringt man die rechte Seite dieser Gleichung auf einerlei Nenner, so verwandelt sich die Gleichung, nach Weglassung dieses Nenners, in

$$f(x) = (Mx+N)\varphi(x) + (M_1x+N_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x) + \ldots$$
$$\ldots + [(x-\alpha)^2+\beta^2]^k\chi(x).$$

Entwickelt man nun die auf einander folgenden Differentiale dieser Gleichung, und setzt darauf für x die Werthe $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, welche den Factor $(x-\alpha)^2+\beta^2$ zu Null machen, so erhält man in Betracht des Umstandes, daß jede Gleichung sich durch Trennung der reellen und der imaginären Theile in zwei verschiedene Gleichungen zerlegen läßt, genau die nöthige Anzahl von Gleichungen, welche zur Bestimmung der Constanten M und N, M_1 und N_1, M_2 und N_2, 2c. erforderlich ist.

Ebenso würde man verfahren, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs noch andere vielfache imaginäre Wurzeln enthalten sollte.

§. 271. Mit Hülfe der bisherigen Entwickelungen kann die Integration des im §. 265 vorgelegten Differentials

$$dy = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + f}{x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + t}\, dx$$

stets ausgeführt werden. Wenn man nämlich nach den gegebenen Regeln den Bruch, welcher mit dx multiplicirt ist, in seine Partialbrüche zerlegt, so gelangt man zuletzt immer zu einem oder einigen von den Differentialen

$$\frac{Adx}{x-a}, \quad \frac{Adx}{(x-a)^k}, \quad \frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k},$$

auf deren Integration mithin die gegebene Aufgabe jederzeit zurückkommt. Ueber die Integration dieser vier Differentiale aber kann man Folgendes bemerken.

1) Nach §. 259 erkennt man sofort, daß

$$dy = \frac{Adx}{x-a} \quad \text{gibt} \quad y = C + A \,.\, l(x-a),$$

wo C die willkürliche Constante bedeutet.

2) Eben daher sieht man, daß

$$dy = \frac{Adx}{(x-a)^k} \quad \text{gibt} \quad y = C - \frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}.$$

§. 272. 3) Aus

$$dy = \frac{(Mx+N)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{M(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\frac{M\alpha+N}{\beta}\frac{dx}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}$$

erhält man

$$y = C + \frac{M}{2}\, l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{M\alpha+N}{\beta} \operatorname{arc tang} \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

§. 273. 4) Endlich in Betreff der Differentialfunction

$$dy = \frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \frac{M(x-\alpha)dx+(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k}$$

findet man zunächst, daß die Integration ihres ersten Theils

$$\frac{M(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} \quad \text{gibt} \quad C - \frac{M}{2(k-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{k-1}};$$

dagegen von dem zweiten Theile

$$\frac{(M\alpha+N)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \frac{\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}\frac{dx}{\beta}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^k}$$

findet man das Integral auf folgende Weise.

Man setze $\frac{x-\alpha}{\beta}=t$, so daß $\frac{dx}{\beta}=dt$, so wird dieses letztere Differential

$$\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}\,\frac{dt}{(t^2+1)^k},$$

und es ist jetzt nur noch darum zu thun, die Differentialfunction

$$\frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

zu integriren. Zu dem Ende bringe man diese Function, indem man im Zähler t^2dt addirt und subtrahirt, auf die Form

$$\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}-\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k},$$

wodurch man erhält

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\int\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}.$$

Wenn man aber das letzte dieser Integrale nach der Methode der Integration durch Theile (§. 260) behandelt, indem man $\frac{t}{2}$ und $\frac{2tdt}{(t^2+1)^k}$ zu Factoren wählt, so kommt

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^k}=-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}}+\int\frac{dt}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}},$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung substituirt

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}.$$

Durch diese Gleichung wird das gesuchte Integral abhängig gemacht von einem anderen Integrale derselben Art, in welchem der Exponent k des Nenners um eine Einheit verringert worden ist. Fährt man auf diese Weise weiter fort, so findet man zuletzt als Ausdruck für das gesuchte Integral

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^k}=\frac{t}{2(t^2+1)^{k-1}}\Bigg[\frac{k}{k-1}$$

$$+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{t^2+1}{k-2}$$

$$+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{(t^2+1)^2}{k-3}$$

$$+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\cdot\frac{(t^2+1)^3}{k-4}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\cdots\frac{\frac{5}{2}}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{(t^2+1)^{k-2}}{1}\Bigg]$$

$$+\frac{k-\frac{3}{2}}{k-1}\cdot\frac{k-\frac{5}{2}}{k-2}\cdot\frac{k-\frac{7}{2}}{k-3}\cdots\frac{\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot\text{arc tang}\,t.$$

Wenn man in diesem Ausdrucke für t seinen Werth $\frac{x-\alpha}{\beta}$ zurücksetzt, und mit $\frac{M\alpha+N}{\beta^{2k-1}}$ multiplicirt, so hat man das Integral des zweiten Theils von der gegebenen Differentialfunction, welches zu dem oben gefundenen Integrale des ersten Theils addirt den vollständigen Ausdruck für y liefert.

Man kann aus den Entwickelungen dieses Abschnitts den Schluß ziehen, daß sich die Integration einer wie immer beschaffenen rationalen Function stets ausführen läßt.

XXV. Integration der irrationalen Functionen, welche eine Wurzel des zweiten Grades enthalten. Binomische Differentiale.

§. 274. Wenn eine gegebene algebraische Differentialfunction irrational ist, so kann man im allgemeinen nicht versichert sein, daß ihre Integration sich unter endlicher Form ausführen läßt. Die Wege, welche man zu diesem Ende einschlägt, kommen hauptsächlich darauf hinaus, daß man für die Veränderliche x, in Bezug auf welche das gegebene Differential genommen ist, eine neue Veränderliche t von solcher Beschaffenheit einzuführen sucht, daß mit der Substitution der Werthe von x und dx durch t und dt die Irrationalität der gegebenen Function verschwindet.

§. 275. Der ausgedehnteste Fall, in welchem der angegebene Weg stets zum Ziele führt, ist derjenige, wo die Irrationalität der vorgelegten Function bloß an der Anwesenheit einer Wurzel des zweiten Grades haftet, welche die Form hat $\sqrt{a+bx+cx^2}$ oder $\sqrt{a+bx-cx^2}$, indem man unter a und b beliebige constante Größen, und unter c eine positive Constante versteht. Man kann alsdann diese Function immer rational machen, und folglich ihre Integration mit Hülfe der Methoden des vorigen Abschnitts ausführen.

Erstens in dem Falle, wo das Glied cx^2 das positive Vorzeichen hat*), kann man setzen, indem man mit t eine neue Veränderliche bezeichnet,

*) Wenn $c=0$ ist, also die Wurzel die einfache Gestalt hat $\sqrt{a+bx}$, so kann man die Function, welche diese Wurzel in sich enthält, ganz

$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-x\sqrt{c}$, oder $a+bx=t^2-2tx\sqrt{c}$, woraus folgt

$$x=\frac{t^2-a}{2t\sqrt{c}+b}, \quad \text{und } dx=\frac{2(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c})dt}{(2t\sqrt{c}+b)^2}.$$

Die Substitution dieser Werthe macht augenscheinlich die gegebene Function rational.

§. 276. Zweitens in dem Falle, wo das Vorzeichen des Gliedes cx^2 negativ ist, wird gleichfalls die gegebene Function rational werden, wenn man setzt

$\sqrt{a+bx-cx^2}=xt-\sqrt{a}$, oder $b-cx=xt^2-2t\sqrt{a}$, woraus folgt

$$x=\frac{b+2t\sqrt{a}}{c+t^2}, \quad \text{und } dx=\frac{2(c\sqrt{a}-bt-t^2\sqrt{a})dt}{(c+t^2)^2}.$$

Da indessen diese Transformation in dem Falle, wo die Größe a negativ ist, imaginäre Glieder in das gegebene Differential einführen würde, so kann man alsdann auf folgende Weise verfahren. Man beachte nämlich, daß man

---

einfach dadurch rational machen, daß man unmittelbar setzt

$$\sqrt{a+bx}=t,$$

woraus folgt

$$x=\frac{t^2-a}{b}, \quad \text{und } dx=\frac{2t\,dt}{b}.$$

Diese Bemerkung kann zugleich dazu dienen, die nachstehend angegebenen Transformationen zu motiviren. Denn daß man nicht gleichfalls $\sqrt{a+bx\pm cx^2}=t$ setzen dürfe, wenn die Ausdrücke von x und dx durch t und dt rational ausfallen sollen, das übersieht man ohne Schwierigkeit. Es muß im Gegentheil die Transformation stets so eingerichtet werden, daß die Gleichung, aus welcher x durch t bestimmt werden soll, in Bezug auf x linear wird: und dieses leisten die folgenden beiden Substitutionen für $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und $\sqrt{a+bx-cx^2}$.

es hier nur mit reellen Größen zu thun hat, folglich auch nur mit solchen Werthen von x, welche die Wurzel $\sqrt{a+bx-cx^2}$ reell machen. Das Trinom $a+bx-cx^2$ hat also nur positive Werthe; woraus folgt, daß die Gleichung $x^2-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}=0$ zwei reelle Wurzeln besitzt. Diese Wurzeln mögen mit ϱ und ϱ_1 bezeichnet werden. Man setze nun

$$\sqrt{a+bx-cx^2}=\sqrt{c(x-\varrho)(\varrho_1-x)}=(x-\varrho)t\sqrt{c}$$
$$\text{oder } \varrho_1-x=(x-\varrho)t^2,$$

so folgt

$$x=\frac{\varrho t^2+\varrho_1}{t^2+1}, \qquad \text{und } dx=\frac{2(\varrho-\varrho_1)tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Diese Werthe werden das vorgelegte Differential rational machen, ohne darin imaginäre Größen einzuführen.

§. 277. Die Irrationalität einer Differentialfunction kann auch, wenn sie aus der Anwesenheit zweier verschiedenen Wurzeln des ersten Grades wie $\sqrt{a+x}$ und $\sqrt{b+x}$ entsteht, dadurch zum Verschwinden gebracht werden, daß man setzt

$$\sqrt{b+x}=t, \quad \text{woraus } x=t^2-b, \quad dx=2tdt.$$

Diese Transformation beseitigt nämlich die zweite von jenen Wurzeln, und gibt der erstern die Form $\sqrt{a-b+t^2}$, womit die gegebene Function auf den Fall des §. 275 zurückgeführt wird.

§. 278. Die einfachsten Anwendungen der gegebenen Methoden sind die nachstehenden.

Es sei gegeben

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

so wandelt die Transformation des §. 275 dieses Differential um in

$$dy = \frac{2dt}{2t\sqrt{c}+b}.$$

Folglich erhält man

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}}.l(2t\sqrt{c}+b)$$

und wenn man für t seinen Ausdruck durch x zurücksetzt

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}}.l(b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}),$$

oder was dasselbe sagt

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}}.l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$

indem C die willkürliche Constante bedeutet, welche durch die Integration eingeführt wird.

§. 279. Es sei gegeben

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}.$$

Wendet man die erste Transformation des §. 276 an, so verwandelt sich dieses Differential in

$$dy = -\frac{2dt}{c+t^2}, \quad \text{oder } dy = -\frac{2}{\sqrt{c}}.\frac{\frac{dt}{\sqrt{c}}}{1+\frac{t^2}{c}},$$

wovon das Integral ist

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}}.\text{arc tang}\,\frac{t}{\sqrt{c}},$$

und wenn man für t seinen Ausdruck durch x zurücksetzt

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}}.\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx-cx^2}}{x\sqrt{c}}.$$

Wendet man dagegen die zweite Transformation desselben Paragraphen an, so verwandelt sich das gegebene Differential in

$$dy = -\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{dt}{1+t^2},$$

und davon ist das Integral

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}} . \operatorname{arc} \operatorname{tang} t,$$

oder wenn man für t seinen Werth setzt

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}} . \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{\varrho_1 - x}{x - \varrho}},$$

oder, da ϱ und ϱ_1 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0$ sind,

$$y = C - \frac{2}{\sqrt{c}} . \operatorname{arc} \operatorname{tang} \sqrt{\frac{-2cx + b + \sqrt{4ac + b^2}}{2cx - b + \sqrt{4ac + b^2}}}.$$

Diese beiden Ausdrücke für das gesuchte Integral y können für einander gesetzt werden, und unterscheiden sich nur in dem Werthe der willkürlichen Constante.

§. 280. In dem besonderen Falle, wo das gegebene Differential ist

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

hat man $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. Folglich wird aus §. 278

$$y = C + l\,(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

§. 281. In dem Falle, wo das Differential gegeben ist

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

kennt man schon sein Integral $y = C + \operatorname{arc} \sin x$. Wenn man aber auf diesen Fall die erste Formel des §. 279 in Anwendung bringt, so erhält man

$$y = C - 2 \text{ arc tang } \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Aus diesem Ausdrucke wird, wenn man $\text{arc}\sin x = \varphi$ setzt,

$$y = C - 2 \text{ arc tang} \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = C - 2 \text{ arc tang} \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$
$$= C - (\pi - \varphi) = C + \varphi.$$

Ebenso wird durch Anwendung der zweiten Formel desselben Paragraphen

$$y = C - 2 \text{ arc tang} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

wofür man auch setzen kann

$$y = C - \text{arc tang} \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \frac{1-x}{1+x}} = C - \text{arc tang} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Daraus wird wie vorhin

$$y = C - \text{arc tang} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = C - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = C + \varphi.$$

§. 282. Man kann bemerken, daß sich das Integral der Differentialfunction

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

auch nach der Formel des §. 278 finden läßt, wenn man darin setzt $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$. Man findet alsdann den imaginären Ausdruck

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{-1}} . l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}).$$

Um denselben mit dem reellen Ausdruck $y = C + \text{arc}\sin x$ zu vergleichen, ist zunächst klar, daß man in beiden der willkürlichen Constante einerlei Werth beilegen muß, weil man aus beiden erhält $y = C$ wenn man $x = 0$ setzt. Folglich ist ferner

$$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{-1}} . l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2})$$

oder

$$\varphi \sqrt{-1} = l(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi),$$

welche Gleichung dem XII. Abschnitte gemäß ist.

§. 283. Es kann einfacher scheinen, zum Behufe der Integration des Differentials

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$$

nicht etwa eine der beiden Transformationen anzuwenden, welche im §. 279 aus einander gesetzt worden sind, sodann dieses Differential unmittelbar auf die Form $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ zurückzuführen. Man wird zu dem Ende setzen

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x-x^2}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}-\left(x-\frac{b}{2c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} . \frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}\right)^2}},$$

wovon das Integral ist

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{x-\frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}}}$$

oder

$$y = C + \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{4ac + b^2}}.$$

Dieser neue Ausdruck unterscheidet sich wieder von den beiden im §. 279 gegebenen nur durch den Werth der willkürlichen Constante.

Ebenso kann man das Differential

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

zurückführen auf $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$, wovon das Integral im §. 280 gegeben worden ist; jedoch erhält man dadurch keinen einfacheren Ausdruck für das Integral, als denjenigen des §. 278.

Binomische Differentiale.

§. 284. Mit dem Namen der binomischen Differentiale bezeichnet man die Differentiale von der Form

$$dy = dx \, . \, x^{m-1} \, (a + bx^n)^{\frac{p}{q}},$$

wo unter a, b, m, n beliebige Constanten, dagegen unter p und q ganze Zahlen verstanden werden. Die Allgemeinheit dieser Function wird übrigens nicht beschränkt, wenn man auch m und n als ganze Zahlen, und selbst wenn man n als positiv voraussetzt. Denn es bedarf immer nur einfacher Umformungen, um von dem allgemeinen Falle zu diesem specielleren überzugehen. Die nächste Untersuchung betrifft hier die Frage, unter welchen Umständen das vorstehende Differential rational gemacht werden könne.

1) Wenn man setzt

$$a + bx^n = t^q,$$

so wird

$$x = \left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{und} \quad dx = dt.\frac{qt^{q-1}}{nb}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

und das gegebene Differential verwandelt sich in

$$dy = dt.\frac{qt^{p+q-1}}{nb}\left(\frac{t^q - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}.$$

Es wird also rational werden, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

2) Wenn man setzt

$$a + bx^n = x^n t^q,$$

so wird

$$x = \left(\frac{a}{t^q - b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{und} \quad dx = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{t^q - b}\right)^{\frac{1}{n}-1} d\,\frac{a}{t^q - b}$$

und das gegebene Differential verwandelt sich in

$$dy = \frac{t^p}{n}\left(\frac{a}{t^q - b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}-1} d\,\frac{a}{t^q - b}.$$

Es wird also rational, wenn $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist.

Diese beiden Fälle sind die einzigen, in denen man sicher sein kann, das binomische Differential rational zu machen.

§. 285. Nach dem Vorhergehenden kann man jedes Differential integriren, welches die Form hat

$$dy = F[x^{mn}, (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}, (a+bx^n)^{\frac{r}{s}}, (a+bx^n)^{\frac{t}{u}}, \text{ꝛc.}]x^{n-1}dx,$$

wo m, n, p, q, r, s, t, u ꝛc. ganze Zahlen bedeuten, und F eine rationale Function der in den Klammern enthaltenen Größen. Denn die gegebene Function wird rational werden, wenn man setzt

$$a + bx^n = t^{qsu\ldots}.$$

Ebenso kann man jedes Differential integriren, welches die Form hat

$$dy = F\left[x^{mn}, \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{r}{s}}, \left(\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n}\right)^{\frac{t}{u}}, \text{2c.}\right] x$$

denn dieses Differential wird rational, wenn man setzt

$$\frac{a+bx^n}{a'+b'x^n} = t^{qsu\ldots}.$$

§. 286. Wenn das binomische Differential

$$dy = dx \,.\, x^{m-1}\,(a+bx^n)^p$$

(wo p jetzt einen Bruch bezeichnet) nicht rational gemacht werden kann, so sucht man es dadurch auf eine einfachere Gestalt zu reduciren, daß man die Exponenten m oder p kleiner macht. Die Reductionen werden vermittelst der Integration durch Theile ausgeführt, deren Wesen im §. 260 angezeigt worden ist.

1) Wenn m positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten wie folgt. Man hat (mit Weglassung der Constante)

$$y = \int x^{m-n} \,.\, (a+bx^n)^p\, x^{n-1}\, dx$$

$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} - \frac{m-n}{n(p+1)b} \int dx \,.\, x^{m-n-1}\,(a+bx^n)^{p+1}.$$

Aber es ist

$$\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} = \int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p.(a+bx^n)$$

$$= a\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p + by;$$

folglich wird

$$y = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b} - \frac{m-n}{n(p+1)} y - \frac{(m-n)a}{n(p+1)b} \int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p$$

und daraus endlich

$$y = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n)\,a\int dx.x^{m-n-1}(a+bx^n)^p}{(m+np)b}.$$

Durch diese Gleichung wird das gesuchte Integral abhängig

gemacht von einem anderen Integrale von derselben Gestalt, in welchem der Exponent $m-1$ um die Zahl n kleiner geworden ist. Bei fortgesetzter Anwendung derselben Gleichung kann man diesen Exponenten um das größte Vielfache von n, welches er in sich enthält, verkleinern.

2) Wenn p positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten auf folgende Weise. Es ist

$$y=\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}.(a+bx^n)$$
$$=a\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}+b\int dx.x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}.$$

Aber die vorhin gefundene Gleichung gibt, wenn man darin m in $m+n$, und p in $p-1$ verwandelt

$$\int dx.x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}=\frac{x^m(a+bx^n)^p-ma\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+np)b};$$

folglich wird

$$y=\frac{x^m(a+bx^n)^p+npa\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+np}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann der Exponent p in dem vorgelegten Differential um die größte ganze Zahl, welche in ihm enthalten ist, verkleinert werden.

3) Wenn der Exponent m negativ ist, so verfährt man wie folgt. Man hat aus der ersten Gleichung

$$x^{m-n-1}.(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}-(m+np)b\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{(m-n)a};$$

folglich wenn man $-m+n$ an die Stelle von m setzt

$$^{-m-1}(a+bx^n)^p=-\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}+(m-n-np)b\int dx.x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p}{ma}.$$

4) Wenn der Exponent p negativ ist, so hat man aus der zweiten Gleichung

$$lx.x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}=-\frac{x^m(a+bx^n)^p-(m+np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^p}{npa};$$

folglich wenn man $-p+1$ statt p setzt

$$^{m-1}(a+bx^n)^{-p}=\frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}-(m+n-np)\int dx.x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1}}{n(p-1)a}.$$

Die vorstehenden Gleichungen können nicht gebraucht werden, wenn man hat $m+np=0$ oder $m-n=0$. Aber in diesen beiden Fällen kann man, wie sich im §. 284 gezeigt hat, das binomische Differential rational machen. Außerdem kann man bemerken, daß selbst in den Fällen, wo dieses Differential rational ist oder rational gemacht werden kann, die Anwendung der gefundenen Reductionsformeln in der Regel das einfachste Mittel ist, um das verlangte Integral zu erhalten. Ein Beispiel dieser Art kam schon im §. 273 vor.

§. 287. Als Beispiel sei noch das Differential gegeben

$$dy = \frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}} = dx \, . \, x^{r-\frac{1}{2}} (a-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man wird die erste Gleichung des vorigen Paragraphen anwenden, in welcher man zu setzen hat $m=r+\frac{1}{2}$, $n=1$ $p=-\frac{1}{2}$, $b=-1$; dadurch wird

$$y = -\frac{x^{r-1}\sqrt{ax-x^2}}{r} + \frac{(2r-1)a}{2r}\int\frac{x^{r-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens gelangt man augenscheinlich zuletzt zu dem Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

welches unter die in den §§. 279 ꝛc. behandelten Fälle gehört, und dessen Integral man unmittelbar aus §. 283 entnehmen kann, nämlich

$$C + \arcsin\frac{2x-a}{a}.$$

XXVI. Integration der transcendenten Functionen.

---

§. 288. Wenn ein vorgelegtes Differential logarithmische Functionen, trigonometrische Functionen, oder die Umkehrungen derselben in sich enthält, so ist die Integration in endlicher oder geschlossener Form nur in einigen besonderen Fällen zu leisten.

Zunächst erkennt man, zufolge einer der Bemerkungen des §. 262, daß, wenn das Integral von $f(x)\,dx$ bekannt ist, man sodann auch sofort die Integrale der folgenden Differentialfunctionen angeben kann:

$$f(lx)\,\frac{dx}{x},\quad f(e^x)\,e^x dx,$$

$$f(\sin x)\cos x\,dx,\quad f(\cos x)\sin x\,dx,$$

$$f(\operatorname{arc\,tang} x)\,\frac{dx}{1+x^2},\ f(\arcsin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ f(\arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ferner wenn das Zeichen f eine algebraische Function derjenigen Größen anzeigt, welche unter diesem Zeichen enthalten sind, so kann man die Differentialfunctionen

$$f(e^x)\,dx,\quad f(\sin x, \cos x)\,dx$$

algebraisch machen, wenn man in der ersten $e^x = t$, und in der zweiten $\sin x = t$ oder $\cos x = t$ setzt. Folglich lassen diese Functionen die Integration zu, wenn die Function f rational ist oder rational gemacht werden kann. Dieses gilt auch dann noch, wenn unter dem Functionszeichen f die Größen $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$, 2c. oder $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, 2c. enthalten sind, weil die Sinus und Cosinus der vielfachen Bögen durch die Potenzen des Sinus oder Cosinus des einfachen Bogens rational ausgedrückt werden können, welches sich unmittelbar aus der Moivre'schen Binomialformel (§. 117) nachweisen läßt.

§. 289. Es läßt sich auch zeigen, daß die transcendenten Differentialfunctionen zuweilen integrirt werden können, wenn sie unter die Form fallen

$$Pz^n dx,$$

wo P eine algebraische Function bedeutet, z eine transcendente Function, deren Differentialverhältniß der ersten Ordnung algebraisch ist, und n eine positive ganze Zahl. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man hat $z = l.f(x)$ oder $z = \operatorname{arc tang} f(x)$, und zugleich $f(x)$ eine algebraische Function von x ist.

Denn wenn man auf jenes Differential die Integration durch Theile anwendet, und $\int dx . P = Q$ setzt, so kommt

$$\int dx.Pz^n = Qz^n - n \int dx.Qz^{n-1} \frac{dz}{dx};$$

ferner wenn man $\int dx . Q \frac{dz}{dx} = R$ setzt

$$\int dx.Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} = Rz^{n-1} - (n-1) \int dx.Rz^{n-2} \frac{dz}{dx};$$

ferner wenn man $\int dx . R \frac{dz}{dx} = S$ setzt

$$\int dx.Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} = Sz^{n-3} - (n-2) \int dx.Sz^{n-3} \frac{dz}{dx};$$

und so fort. Einen etwas abweichenden Weg wird man einzuschlagen haben, wenn der Exponent n negativ ist. Die Auffindung des verlangten Resultats haftet schließlich an der Bedingung, daß die mit Q, R, S, ꝛc. bezeichneten Größen in endlicher Form müssen angegeben werden können.

§. 290. Ein einfaches Beispiel zu der vorigen Operation bietet die Integration des Differentials

$$dy = dx.(lx)^n,$$

woraus, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$y=C+x(lx)^n\left[1-\frac{n}{lx}+\frac{n(n-1)}{(lx)^2}-\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{(lx)^n}\right].$$

Oder wenn gegeben ist

$$dy=dx\,.\,x^{a-1}\,(lx)^n,$$

so kommt

$$y=C+\frac{x^a}{a}(lx)^n\left[1-\frac{n}{alx}+\frac{n(n-1)}{a^2(lx)^2}-\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{a^n(lx)^n}\right].$$

§. 291. Die Integration durch Theile gibt auf dieselbe Weise das Integral von

$$dy=dx\,.\,x^ne^{ax}.$$

Man hat nämlich

$$\int dx.x^ne^{ax}=\frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int dx.x^{n-1}e^{ax};$$

mithin durch Wiederholung derselben Umwandlung

$$\int dx.x^ne^{ax}=C+\frac{x^ne^{ax}}{a}\left[1-\frac{n}{ax}+\frac{n(n-1)}{a^2x^2}-\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{a_nx^n}\right].$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$\int dx.x^n\cos ax=C+\frac{x^n}{a}\left\{\sin ax\left[1-\frac{n(n-1)}{a^2x^2}+\text{etc.}\right]\right.$$
$$\left.+\cos ax\left[\frac{n}{ax}-\frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3}+\text{etc.}\right]\right\}$$

$$\int dx.x^n\sin ax=C-\frac{x^n}{a}\left\{\cos ax\left[1-\frac{n(n-1)}{a^2x^2}+\text{etc.}\right]\right.$$
$$\left.-\sin ax\left[\frac{n}{ax}-\frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3}+\text{etc.}\right]\right\}.$$

§. 292. Die Integration durch Theile gibt ferner

$$\int dx\,.\,e^{ax}\cos bx=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int dx\,.\,e^{ax}\sin bx$$

$$\int dx\,.\,e^{ax}\sin bx=\frac{e^{ax}\sin bx}{a}-\frac{b}{a}\int dx\,.\,e^{ax}\cos bx,$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$\int dx \,.\, e^{ax} \cos bx = C + \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax}$$

$$\int dx \,.\, e^{ax} \sin bx = C + \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax}.$$

Die Kenntniß dieser beiden Integrale gestattet auch die Integration der Differentiale $dx \,.\, x^n e^{ax} \cos bx$ und $dx \,.\, x^n e^{ax} \sin bx$ auf demselben Wege, welcher im vorigen Paragraphen eingeschlagen wurde.

§. 293. Wenn die Differentiale, welche transcendente Functionen enthalten, nicht in endlicher Form integrirt werden können, so sucht man sie wenigstens von einfacheren Functionen abhängig zu machen. Unter den Reductionsformeln, welche man zu diesem Zwecke anwendet, sind vorzüglich diejenigen hervorzuheben, welche das Differential betreffen

$$dy = dx \,.\, \sin x^m \cos x^n,$$

wo m und n beliebige positive oder negative Zahlen bedeuten.

Zunächst kann man bemerken, daß dieses Differential sich leicht auf die binomischen Differentiale zurückführen läßt, welche in den §§. 284 ꝛc. behandelt worden sind. Denn man hat

$$dy = dx \,.\, \sin x^m (1 - \sin x^2)^{\frac{n}{2}},$$

und wenn man sodann $\sin x = t$ setzt, folglich $dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$, so wird

$$dy = dt \,.\, t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Hierauf kann man unmittelbar die Reductionsformeln des §. 286 anwenden. Es ist indessen einfacher, mit dem gegebenen Differential selbst zu operiren.

1) Wenn der Exponent m positiv ist, so verkleinert

man diesen Exponenten ohne n zu vergrößern, indem man beachtet, daß

$$y = \int \sin x^{m-1} \cos x^n \sin x\, dx.$$

Daraus wird

$$y = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int dx . \sin x^{m-2} \cos^{n+2}$$

$$= -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left[\int dx . \sin x^{m-2} \cos x^n - y \right]$$

und hieraus erhält man für y den Werth

$$\int dx . \sin x^m \cos x^n = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx . \sin x^{m-2} \cos x^n .$$

2) Wenn der Exponent n positiv ist, so verkleinert man diesen Exponenten ohne m zu vergrößern, indem man auf ähnliche Weise die Gleichung entwickelt

$$\int dx . \sin x^m \cos x^n = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx . \sin x^m \cos x^{n-2} .$$

3) Wenn der Exponent m negativ ist, so zieht man aus der ersten der gefundenen Gleichungen

$$\int dx . \sin x^{m-2} \cos x^n = \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} \int dx . \sin x^m \cos x^n ;$$

und wenn man m in $-m+2$ umwandelt

$$\int dx . \frac{\cos x^n}{\sin x^m} = -\frac{\cos x^{n+1}}{(m-1) \sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int dx . \frac{\cos x^n}{\sin x^{m-2}} .$$

4) Wenn endlich der Exponent n negativ ist, so erhält man aus der zweiten Gleichung

$$\int dx . \sin x^m \cos x^{n-2} = -\frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{n-1} + \frac{m+n}{n-1} \int dx . \sin x^m \cos x^n ;$$

und wenn man n in $-n+2$ verwandelt

$$\int dx . \frac{\sin x^m}{\cos x^n} = \frac{\sin x^{m+1}}{(n-1) \cos x^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-1} \int dx . \frac{\sin x^m}{\cos x^{n-2}} .$$

§. 294. Unter den besonderen Fällen, welche in den vorstehend gefundenen Gleichungen enthalten sind, verdienen die folgenden hervorgehoben zu werden.

$$\int dx \,.\, \sin x^m = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int dx \,.\, \sin x^{m-2}$$

$$\int dx \,.\, \cos x^n = \frac{\sin x \cos x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int dx \,.\, \cos x^{n-2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin x^{m-2}}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos x^{n-2}}$$

$$\int dx \,.\, \frac{\sin x^n}{\cos x^n} = \int dx . \operatorname{tang} x^n = \frac{\operatorname{tang} x^{n-1}}{n-1} - \int dx \,.\, \operatorname{tang} x^{n-2}$$

$$\int dx \,.\, \frac{\cos x^n}{\sin x^n} = \int dx . \cot x^n = -\frac{\cot x^{n-1}}{n-1} - \int dx \,.\, \cot x^{n-2}.$$

§. 295. Durch die Reductionsformeln des §. 293 wird die Integration der Differentiale von der Form $dx \,.\, \sin x^m \cos x^n$ immer abhängig gemacht von der Integration anderer Differentiale von derselben Form, in denen die Exponenten m und n nicht über 1 und — 1 hinausgehen. Und wenn die Exponenten m und n positive oder negative ganze Zahlen sind, so führt die Integration des vorgelegten Differentials schließlich immer auf eines der neun Differentiale, deren Integrale hier folgen.

$$\int dx = C + x \qquad\qquad \int dx . \sin x \cos x = C + \frac{1}{2} \sin x^2$$

$$\int dx \,.\, \sin x = C - \cos x \qquad\qquad \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = C + l \operatorname{tang} x$$

$$\int dx \,.\, \cos x = C + \sin x \qquad\qquad \int dx \,.\, \operatorname{tang} x = C - l \cos x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = C + l \operatorname{tang} \frac{x}{2} \qquad\qquad \int dx \,.\, \cot x = C + l \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = C + l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Also kann man in allen Fällen, wo m und n ganze Zahlen sind, das Integral des in Rede stehenden Differentials in geschlossener Form darstellen.

Man kann noch bemerken, daß sich die Differentiale dieser Art auch dadurch integriren lassen, daß man für $\sin x^m$ und $\cos x^n$ ihre Ausdrücke durch die Sinus und Cosinus des Bogens x und seiner Vielfachen setzt, welche in den §§. 136 ꝛc. entwickelt worden sind. Diese Ausdrücke geben eine geschlossene Anzahl von Gliedern, sobald m und n positive ganze Zahlen sind.

§. 296. Da das Integral von

$$dx.\sin x^m \cos x^n$$

in endlicher Form dargestellt werden kann, wenn m und n ganze Zahlen sind, so läßt sich mit Hülfe des Verfahrens, welches in den §§. 291 ꝛc. angewandt worden ist, in gleichem Falle auch das Differential integriren

$$dx.x^p \sin x^m \cos x^n,$$

wo p gleichfalls eine ganze Zahl bedeutet; oder noch allgemeiner das Differential

$$dx.P \sin x^m \cos x^n,$$

wenn man unter P eine rationale und ganze Function von x versteht.

Die Differentiale von der Form

$$dx.P.(\text{arc}\sin x)^n \quad \text{oder} \quad dx.P.(\text{arc}\cos x)^n$$

lassen sich auf die vorigen zurückführen, wenn man setzt

$$x = \sin t \quad \text{oder} \quad x = \cos t.$$

XXVII. Integration durch Reihen.

---

§. 297. Im allgemeinen kann jede Function in eine Reihe entwickelt werden, welche nach ganzen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen geordnet ist; und dadurch wird man in den Stand gesetzt, den Ausdruck für das Integral einer gegebenen Differentialfunction unter der nämlichen Form darzustellen. Denn da man nach §. 81 im allgemeinen hat

$$f(x)=f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{2.3}x^3+\text{rc.},$$

so folgt unmittelbar

$$\int f(x)\,dx=C+f(0).x+f'(0)\frac{x^2}{2}+\frac{f''(0)}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{f'''(0)}{2.3}\frac{x^4}{4}+\text{rc.}$$

wo C die willkürliche Constante bezeichnet, welche hinzugefügt werden muß, um dem Integrale die nöthige Allgemeinheit zu geben. Dieser Ausdruck des Integrals $\int f(x)$ durch eine Reihe kann in allen Fällen angewandt werden, wo diese Reihe convergent ist.

Man kann überdies bemerken, daß, wenn die Reihe convergirt, welche die Entwickelung von $f(x)$ darstellt, sodann um so mehr diejenige Reihe, welche die Entwickelung von $\int f(x)\,dx$ gibt, convergiren wird. Denn die Entwickelung von $f(x)$ kann nur dann convergiren, wenn für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und x enthalten sind, das Ergänzungsglied (§. 86)

$$\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4\ldots\mu}x^{\mu}$$

kleiner wird als jede gegebene Größe, wenn man die Zahl μ unbestimmt wachsen läßt. Es sei nun Q der größte

Werth des Factors $\frac{f^{\mu}(\theta x)}{2.3.4\ldots\mu}$, so wird, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist, dieselbe auch für die Größe

$$Q\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

stattfinden, und folglich um so mehr für das Ergänzungsglied der Reihe, welche das Integral darstellt.

§. 298. Wenn die Function $f(x)$ sich in einem der Ausnahmefälle befindet, welche in den §§. 88 ꝛc. angezeigt worden sind, d. h. wenn die Entwickelung dieser Function gebrochene oder negative Potenzen von x enthält, so kann man diese Entwickelung gleichfalls benutzen, um den Ausdruck des Integrals $\int f(x)\,dx$ durch eine Reihe zu erhalten. Diese Reihe wird sodann, so lange sie convergent ist, zur numerischen Berechnung des Integrals dienen können.

§. 299. Die Integration durch Reihen ist zuweilen der einfachste Weg, auf welchem man die Entwickelung einer Function nach steigenden oder fallenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen erhalten kann.

Man hat z. B.

$$d.l(1+x) = \frac{dx}{1+x} = dx\,(1-x+x^2-x^3+x^4-\text{ꝛc.}),$$

folglich

$$l(1+x) = \int\frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc.}$$

Die willkürliche Constante C muß so bestimmt werden, daß die vorstehende Gleichung für einen gewissen gegebenen Werth von x bestehen bleibt. Nun wird für $x=0$ die linke Seite der Gleichung zu Null, und die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung verschwindet gleichfalls. Folglich muß $C=0$ sein, und man hat

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc.}$$

wie schon im §. 102 gefunden wurde.

§. 300. Man hat auf dieselbe Weise

$$d.\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{1+x^2} = dx\,(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{etc.}),$$

folglich

$$\operatorname{arc\,tang} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

und da die Constante zu Null wird, so kommt

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

wie im §. 110. Man wird bemerken, daß diese Reihe nur convergent ist, so lange x die Einheit nicht übertrifft. Es läßt sich indessen auch eine Reihe herstellen, welche im Gegentheil convergent ist, sobald x die Einheit übertrifft, wenn man nämlich setzt

$$d.\operatorname{arc\,tang} x = \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{dx}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \text{etc.}\right),$$

woraus folgt

$$\operatorname{arc\,tang} x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \text{etc.},$$

und da der Werth $x = \infty$ diese Gleichung verwandelt in $\frac{\pi}{2} = C$, so ist damit die Constante bestimmt, und man hat schließlich

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \text{etc.}$$

Diese Reihe besitzt Gültigkeit, so lange x zwischen 1 und ∞ enthalten ist.

§. 301. Die Gleichung

$$d.\operatorname{arc\,sin} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dx\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{etc.}\right)$$

gibt auf dieselbe Weise, indem der Werth der Constante Null wird

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \text{rc.}$$

Setzt man hierin $x=1$, so hat man für die Zahl π folgenden Ausdruck

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \text{rc.}$$

§. 302. Man kann die Entwickelung eines gesuchten Integrals $\int f(x)\,dx$ in eine Reihe nicht bloß dadurch erhalten, daß man die Function $f(x)$ nach Potenzen von x entwickelt, wobei man nur Glieder von der Form $ax^m dx$ zu integriren bekommt, sondern auch indem man die Function $f(x)$ zuvor in zwei Factoren zerlegt oder sie unter die Form $\varphi(x).\psi(x)$ bringt, und darauf einen dieser Factoren, z. B. $\psi(x)$, in eine Reihe entwickelt. Die Glieder der Entwickelung, welche integrirt werden müssen, haben alsdann die Gestalt $ax^m\varphi(x)dx$, und es ist mithin nothwendig, daß deren Integration durch die bekannten Methoden ausgeführt werden könne.

Es sei z. B. das Differential gegeben

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(1-bx)}},$$

so gibt die Entwickelung des Factors $(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\left(1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \text{rc.}\right).$$

Jedes Glied der Reihe liefert hier zur Integration ein Differential von der Form $\frac{x^r\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, welches bereits im §. 287 betrachtet worden ist.

XXVIII. Bestimmte Integrale.

---

§. 303. Um an den Begriff des Integrals wieder anzuknüpfen, sei überhaupt

$$f(x)\ dx$$

irgend eine Differentialfunction der Veränderlichen x, und

$$F(x)$$

das Integral dieser Differentialfunction, oder diejenige Function, aus deren Differentiation $f(x)\ dx$ als Differential hervorgeht. Man hat sodann die Beziehung

$$d.F(x) = f(x)\ dx,$$

oder noch allgemeiner

$$d\,[C + F(x)] = f(x)\ dx,$$

wo C eine vollkommen willkürliche Constante bedeutet. Und die Aufsuchung der Function $F(x)$ aus der Differentialfunction $f(x)\ dx$, wenn diese gegeben ist, geschieht durch Hülfe derjenigen Methoden, wie in den vorigen Abschnitten aus einander gesetzt worden sind. Ferner hat sich in den §§. 255 rc. gezeigt, daß eine Function immer betrachtet werden kann wie die Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen ihres Differentials. So stellt also der Ausdruck

$$C + F(x)$$

allgemein die Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen des Differentials $f(x)dx$ dar. So lange die Constante C unbestimmt bleibt, so ist derjenige Werth von x, mit welchem man die Summirung der Differentiale beginnt, gleichfalls unbestimmt; und was den Werth von x betrifft, mit welchem sich die Summe schließt, so ist derselbe identisch

mit demjenigen Werthe dieser Veränderlichen, welcher unter dem Functionszeichen F steht.

Nun gibt es eine nicht geringe Anzahl wichtiger Untersuchungen, welche die Angabe der Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen eines gegebenen Differentials in solcher Weise fordern, daß diese Summe von einem gewissen Werthe x_0 von x, von welchem ausgehend die auf einander folgenden Werthe des Differentials zu einander addirt werden sollen, bis zu einem andern Werthe x_ω dieser Veränderlichen genommen wird, über welchen hinaus eine Addition der Werthe des Differentials nicht weiter stattfinden soll. Man bezeichnet diese Summe auf eine allgemeine Weise durch

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\, dx,$$

indem man unten an das Zeichen $\int$ den Werth der Veränderlichen setzt, mit welchem die Addition der Differentialwerthe zu beginnen hat, und oben an dieses Zeichen denjenigen Werth der Veränderlichen, mit welchem diese Addition abbricht. Man nennt diesen Ausdruck ein bestimmtes Integral, womit man sagen will, daß das Integral, oder die Summe der Differentiale, zwischen bestimmten Gränzen genommen sei; x_0 ist die untere Gränze und x_ω die obere Gränze des Integrals. Die bestimmten Integrale bilden überdies, wie sich in der Folge zeigen wird, eine neue Gattung von Functionen, deren Anwendung sehr ausgedehnt ist.

Will man für die in Rede stehende Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen eines gegebenen Differentials $f(x)\, dx$, zwischen den Gränzen x_0 und x_ω genommen, einen analytischen Ausdruck haben, so denkt man sich das Intervall $x_\omega - x_0$ in n in gleiche Theile ge=

theilt, indem man $x_\omega - x_0 = n\,\Delta x$ setzt, und bildet die Summe

$$f(x_0)\Delta x + f(x_0+\Delta x)\Delta x + f(x_0+2\Delta x)\Delta x + f(x_0+3\Delta x)\Delta x + \ldots$$
$$\ldots + f(x_0 + \overline{n-1}\,.\,\Delta x)\,\Delta x.$$

Der Werth dieses Ausdrucks wird offenbar der gesuchten Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen des gegebenen Differentials im allgemeinen um so näher kommen, je größer man n und je kleiner man folglich Δx angenommen hat. Läßt man also n ohne Aufhören wachsen und folglich gleichzeitig Δx ohne Aufhören abnehmen, so hat man

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)dx = \lim.[f(x_0) + f(x_0+\Delta x) + f(x_0+2\Delta x) + f(x_0+3\Delta x) +$$
$$\ldots + f(x_0 + \overline{n-1}\,.\,\Delta x)]\,\Delta x,$$

wo das Zeichen lim sich auf das unendliche Wachsen von n, und mithin auch auf das gleichzeitige unendliche Abnehmen von Δx bezieht. Diese Gleichung enthält den gesuchten analytischen Ausdruck, und kann mithin wie Definition des bestimmten Integrals angesehen werden.

Im Gegensatze zu den bestimmten Integralen bezeichnet man oft mit dem Namen eines **unbestimmten Integrals** den Ausdruck

$$C + F(x),$$

dessen Aufsuchung der Gegenstand der vorigen Abschnitte gewesen ist, und der bloß auf die allgemeinste Weise der Bedingung genügt, den Ausdruck $f(x)\,dx$ zu seinem Differential zu haben; oder der die Summe der Werthe dieses Differentials, von einem unbestimmten Werthe von x ausgehend, bis zu demjenigen willkürlichen Werthe darstellt, welchen man dieser Veränderlichen in dem Ausdrucke $F(x)$ beilegen will. Es ist indessen im allgemeinen leicht, von der Kenntniß des unbestimmten Integrals eines vorgeleg-

ten Differentials zu derjenigen des bestimmten Integrals, in Bezug auf dasselbe Differential, und zwischen beliebig festgestellten Gränzen genommen, überzugehen. Setzt man nämlich $x = x_0$ in dem Ausdrucke $C + F(x)$, so hat man

$$C + F(x_0),$$

worin die Summe aller Werthe des Differentials $f(x)\,dx$ von einem gewissen unbestimmten Werthe des x bis zu dem Werthe $x = x_0$ ausgesprochen liegt; und setzt man, ohne die Constante C zu ändern, in demselben Ausdrucke $x = x_\omega$, so hat man

$$C + F(x_\omega),$$

womit die Summe der Werthe desselben Differentials von dem nämlichen unbestimmten Werthe des x bis zu dem Werthe $x = x_\omega$ ausgedrückt wird. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke, nämlich

$$F(x_\omega) - F(x_0)$$

stellt also diejenige Summe der Werthe des in Rede stehenden Differentials dar, welche von dem Werthe $x = x_0$ ausgeht und mit dem Werthe $x = x_\omega$ abbricht.

Aus dieser Betrachtung wird man schließen, daß die Gleichung

$$d . F(x) = f(x)\,dx$$

zur Folge hat

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = F(x_\omega) - F(x_0)$$

d. h. daß man den Werth eines bestimmten Integrals findet, wenn man diejenigen beiden Werthe des unbestimmten Integrals von einander subtrahirt, welche den beiden Integrationsgränzen des bestimmten Integrals als Werthen der unabhängigen Veränderlichen entsprechen.

§. 304. Es ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß man den numerischen Werth eines bestimmten Integrals

$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx$ leicht wird angeben können, sobald man die Function $F(x)$, deren Differential $f(x)\,dx$ ist, entweder in geschlossener Form oder als convergirende Reihe darzustellen vermag. Da dieses jedoch nicht immer möglich ist, so wird man in solchen Fällen genöthigt, den in Rede stehenden numerischen Werth durch Näherungsmethoden zu berechnen, welche in der Folge werden aus einander gesetzt werden. Aber auch selbst dann, wenn die Function $F(x)$ in endlicher Form darstellbar ist, gibt man häufig der Anwendung von Näherungsmethoden den Vorzug vor der directen Aufsuchung dieser Function.

Eine Näherungsmethode der einfachsten Art kann man schon hier angeben, wenn man beachtet, daß der Begriff eines bestimmten Integrals nach dem Obigen stets die Gleichung zur Folge hat

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)dx = \lim.[f(x_0)+f(x_0+\Delta x)+f(x_0+2\Delta x)+f(x_0+3\Delta x)+ \ldots + f(x_0+\overline{n-1}.\Delta x)]\,\Delta x,$$

wo $x_\omega - x_0 = n\Delta x$ ist. Läßt man nämlich das Zeichen lim hinweg, so wird der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung im Allgemeinen desto nähere Werthe für das bestimmte Integral liefern, je größer man die Zahl n, d. h. je kleiner man den numerischen Werth von Δx annimmt. *)

*) So z. B. findet man leicht durch unbestimmte Integration

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Aber die obige Formel liefert, wenn man z. B. $n = 5$ setzt

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(1 + \frac{1}{1+(\frac{1}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{5})^2} + \frac{1}{1+(\frac{4}{5})^2}\right) \cdot \frac{1}{5}$$
$$= 0{,}83\ldots$$

Außerdem folgt aus der angezeigten Darstellungsweise eines bestimmten Integrals, daß man dasselbe jederzeit in eine Summe von mehreren bestimmten Integralen, welche sich auf die nämliche Differentialfunction beziehen, verwandeln kann, indem man das Intervall der gegebenen Integrationsgränzen x_0 und x_ω durch Einschiebung von neuen Werthen x_1, x_2, rc. der Veränderlichen x in zwei, drei, rc. Intervalle zerlegt. So hat man

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_\omega} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_\omega} f(x)\,dx,$$

rc.

wie sich leicht durch die identischen Gleichungen

$$F(x_\omega) - F(x_0) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_\omega) - F(x_1),$$

$$F(x_\omega) - F(x_0) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_\omega) - F(x_2),$$

rc.

nachweisen läßt. Die Werthe x_1, x_2, rc. können übrigens auch außerhalb des Intervalles von x_0 und x_ω liegen.

Als einen besonderen Fall kann man bemerken

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = -\int_{x_\omega}^{x_0} f(x)\,dx,$$

d. h. es kommt auf dasselbe hinaus, ob man das Vorzeichen eines bestimmten Integrals ändert, oder die Gränzen desselben vertauscht.

---

als angenäherten Werth von $\frac{\pi}{4}$. Dieser Werth würde genauer geworden sein, wenn man für n eine größere Zahl als 5 angenommen hätte.

§. 305. Geometrische Betrachtungen können wieder, wie früher, dazu dienen, die gewonnenen Resultate anschaulich zu machen. Man nehme, wie im §. 256, die Veränderliche x zur Abscisse, und die Function $F(x)$, oder allgemeiner $C+F(x)$, zur Ordinate einer Curve. Ein beliebiges Differential

$$d[C+F(x)]=f(x)\,dx$$

dieser Function stellt sodann die unendlich kleine Zunahme dar, welche die Ordinate erleidet, wenn man von der Abscisse x zu der Abscisse $x+dx$ übergeht. Die Summe dieser Zunahmen der Ordinate, über alle Werthe von x ausgedehnt, welche sich von einem gewissen Werthe x_0 bis zu einem anderen Werthe x_ω erstrecken, ist nach dem Obigen einerlei mit dem bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx.$$

Dieselbe Summe bedeutet aber augenscheinlich die Gesammtzunahme der Ordinate, welche von dem Werthe x_0 der Abscisse bis zu dem Werthe x_ω derselben stattfindet, d. h. die Differenz

$$F(x_\omega) - F(x_0).$$

An demselben Bilde lassen sich auch die Behauptungen am Schlusse des vorigen Paragraphen leicht nachweisen.

§. 306. Die obige Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx = F(x_\omega) - F(x_0),$$

in welcher $F(x)$ der Bedingung $d.F(x)=f(x)\,dx$ Genüge leistet, darf übrigens nebst den aus ihr gezogenen Folgerungen nicht auf die Fälle übertragen werden, wo für einen Werth von x, der innerhalb der Integrationsgränzen x_0 und x_ω enthalten ist, die Functionen $f(x)$ oder $F(x)$ unendlich groß werden. Denn schon bei den Betrachtungen

des §. 255, aus denen hervorging, daß das Integral immer die Summe einer unendlich großen Anzahl von Werthen des Differentials darstellte, mußten diejenigen Fälle ausgeschlossen werden, wo die in Rede stehenden Functionen unendlich große Werthe annehmen.

Will man übrigens den Werth eines bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx$ finden, während die Function $f(x)$ für einen gewissen innerhalb der Integrationsgränzen liegenden Werth $x=a$ unendlich groß wird, so kann man das Integral in zwei Theile zerlegen, von denen der erste mit dem Werthe $x=a-\mu$ schließt und der zweite mit dem Werthe $x=a+\nu$ anfängt, d. h. in die beiden bestimmten Integrale

$$\int_{x_0}^{a-\mu} f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{a+\nu}^{x_\omega} f(x)\,dx.$$

Hier bedeuten μ und ν zwei Zahlen, deren Vorzeichen mit demjenigen der Differenz $x_\omega - x_0$ übereinstimmend genommen werden muß. Läßt man nun μ und ν mehr und mehr abnehmen, und betrachtet die Gränze, der dabei die Summe jener beiden Integrale sich mehr und mehr nähert, so hat man den gesuchten Werth. Falls es aber eine solche Gränze nicht gibt, so ist der Werth des vorgelegten Integrals entweder unendlich oder unbestimmt.

Aehnlich hat man zu verfahren, wenn es zwischen den beiden Gränzen x_0 und x_ω zwei oder mehrere Werthe gibt, für welche $f(x)$ unendlich groß wird.

§. 307. Wenn man für die Veränderliche x, welche sich in einem bestimmten Integrale $\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)\,dx$ unter dem Integralzeichen befindet, eine neue Veränderliche einführen

will, so müssen zu gleicher Zeit die Integrationsgränzen gleichfalls eine Aenderung erfahren, in solcher Weise daß dabei die absolute Bedeutung derselben beibehalten wird. Es sei t die neue Veränderliche, welche mit x durch die Gleichung $x = \varphi(t)$ im Zusammenhange steht, so wird man statt dx zu setzen haben $\frac{d.\varphi(t)}{dt}\,dt$; und statt x_0 und x_ω müssen als Integrationsgränzen jetzt diejenigen Werthe von t gesetzt werden, welche resp. aus der Auflösung der Gleichungen $x_0 = \varphi(t)$ und $x_\omega = \varphi(t)$ hervorgehen.

§. 308. Die Betrachtung der bestimmten Integrale kann angewandt werden, um daraus die Taylor'sche Reihe herzuleiten, und führt zu einem bemerkenswerthen Ausdrucke für den Rest der Reihe, welchen man vernachlässigt, wenn man die Entwickelung mit einer bestimmten Anzahl von Gliedern abbricht. Man hat nämlich nach §. 303 für jede Function $f(x)$, welche zwischen den Werthen x und $x+h$ der Veränderlichen continuirlich bleibt, die Gleichung

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(x)\,dx,$$

worin $f'(x)$ das Differentialverhältniß oder die derivirte Function der ersten Ordnung von der Function $f(x)$ bedeutet. Nun kann man in dem bestimmten Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung statt x setzen $x+h-t$, wo unter t eine neue Veränderliche verstanden werden soll, und dadurch verwandelt sich dieses Integral, mit Rücksicht auf das im vorigen Paragraphen Gesagte, in

$$-\int_h^0 dt.f'(x+h-t), \quad \text{oder} \int_0^h dt.f'(x+h-t),$$

so daß man schreiben kann

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h dt.f'(x+h-t).$$

If in $\int f(x)\,dx = \varphi x$

new variable $z = t(x)$

or $x = T(z)$

be introduced,

$f(x)\,dx$ becomes $\int f[T(z)]\,d.\,T(z)$

$\int f(x)\,dx = \varphi x$ becomes $\int f[T(z)]\,d.\,T(z) = \psi(z)$

if w be one of the limits of

$\int f(x)\,dx$, & w' the corresp limit

after introduction of z.

$\psi w' = \varphi w$ or in general

$\psi z = \varphi x = \varphi[T(z)]$

$\psi w' = \varphi w =$ ~~$\varphi[T(w)]$~~ $\varphi[T(w')]$

$w = T(w')$ $w' = t(w)$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{2.3}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu-1}(0)+\int_0^x dt.\frac{t^{\mu-1}}{2.3.4\ldots(\mu-1)}f^{\mu}(x-t).$$

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß dieser neue Ausdruck für das Ergänzungsglied der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe den früher gegebenen Ausdruck, §§. 85 und 86, in sich begreift. Aber während dieser letztere unbestimmt ist, und nur die Gränzen erkennen läßt, zwischen denen der Werth des Restes enthalten sein muß, gibt dagegen der Ausdruck unter der Form eines bestimmten Integrals den Werth dieses Restes vollkommen genau an.

XXIX. Anwendung der bestimmten Integrale auf die Berechnung der Bogenlängen, der Flächen und der Körperräume.*)

1. Flächeninhalt der ebenen Curven.

§. 309. Den Flächeninhalt einer ebenen Curve finden, welche auf zwei rechtwinklige Coordinatenachsen bezogen ist, heißt den numerischen Werth derjenigen Fläche bestimmen, welche zwischen der Achse der x, der Curve, und zwei beliebigen Ordinaten enthalten ist. Die Gleichung der Curve werde mit

*) Oder auf Rectification, Quadratur und Cubatur.

$$y = f(x)$$

bezeichnet, und mit x_0 und x_ω die Abscissen, welche denjenigen Ordinaten zugehören, durch welche man sich die zu ermittelnde Fläche begränzt denkt. Wenn man ferner unter u die Function von x versteht, welche den Werth der Fläche von einem beliebigen Anfangspunkte bis zu einer der Abscisse x entsprechenden Ordinate darstellt, so wird nach §. 156 das Differential dieser Function ausgedrückt durch

$$du = y\,dx.$$

Nun ist die zu findende Fläche augenscheinlich die Summe der unendlich großen Anzahl von Werthen, welche das Differential du annimmt, wenn man für x in diesem Differential nach und nach alle Werthe von x_0 bis x_ω setzt. Folglich wird, vermöge der Begriffsbestimmungen des vorigen Abschnitts, diese Fläche durch das bestimmte Integral dargestellt

$$\int_{x_0}^{x_\omega} y\,dx.$$

In diesem Ausdrucke hat man sich unter den Gränzen x_0 und x_ω zwei gegebene Zahlen zu denken, entsprechend den Lagen der beiden Ordinaten, welche die Fläche begränzen. Das Resultat der Operation, welche durch den in Rede stehenden analytischen Ausdruck angezeigt wird, ist gleichfalls eine bestimmte Zahl, die den Werth dieser Fläche angibt.

Man kann aber auch annehmen, daß die erste Gränze x_0 allein gegeben und fest sei, die zweite Gränze x_ω dagegen unbestimmt und willkürlich. Alsdann bezeichnet man diese zweite Gränze einfach durch x. Das Resultat des bestimmten Integrals wird in diesem Falle eine Function von x sein, welche die Fläche darstellt, die mit einer festen Ordinate, entsprechend der Abscisse x_0, beginnt und mit

irgend einer anderen Ordinate, entsprechend der Abscisse x, endigt. Bezeichnet man diese Fläche mit u, so hat man also

$$u = \int_{x_0}^{x} y\, dx.$$

§. 310. Wenn die gegebene Curve auf Polarcoordinaten bezogen ist, so wird ihre Gleichung unter der Form gegeben

$$r = f(\omega),$$

wo r den Radiusvector und ω den Winkel zwischen dem Radiusvector und einer festen Achse bedeutet. Die Fläche u ist hier der dreiseitige Raum, welcher von einem Radiusvector, der mit der Achse den gegebenen Winkel ω_0 bildet, einem Radiusvector, der mit der Achse einen beliebigen Winkel ω einschließt, und der Curve begränzt wird. Im §. 199 wurde gefunden

$$du = \tfrac{1}{2}\, r^2\, d\omega,$$

folglich wird jetzt

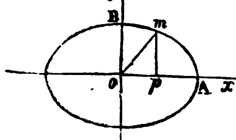
$$u = \tfrac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega} r^2\, d\omega.$$

§. 311. Die Gleichung der Ellipse in Bezug auf ihre Achsen ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

wo a und b die beiden Halbachsen oA und oB, Fig. 45, bedeuten. Die Fläche $oBmp$ wird nach §. 309 ausgedrückt durch

Fig. 45.



$$u = \frac{b}{a}\int_0^{x} dx . \sqrt{a^2 - x^2},$$

wo x die Abscisse op bezeichnet. Um den Werth dieses bestimmten Inte

grals zu erhalten, betrachte man zuvor das unbestimmte Integral

$$\int dx \,.\sqrt{a^2-x^2}.$$

Man könnte dasselbe nach §. 276 rational machen. Einfacher würde es sein, ihm die Form zu geben

$$\int dx \,.\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

wo der erste Theil unmittelbar nach §. 281 integrirt werden kann, der zweite Theil aber, als binomisches Differential betrachtet, auf eine ähnliche Weise wie im §. 287. Man verfährt aber noch einfacher, wenn man setzt

$$\sqrt{a^2-x^2}=tx, \quad \text{woraus} \quad x^2=\frac{a^2}{1+t^2},$$

indem t eine neue Veränderliche bedeutet. Man erhält alsdann

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\int t\,.x dx=\tfrac{1}{2}\,tx^2-\tfrac{1}{2}\int dt\,.x^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\,tx^2-\tfrac{1}{2}\,a^2\int\frac{dt}{1+t^2};$$

folglich

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=C+\tfrac{1}{2}\,tx^2-\tfrac{1}{2}\,a^2 \operatorname{arc\,tang} t,$$

oder

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2}=C+\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}-\tfrac{1}{2}a^2.\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Nimmt man nun das Integral von $x=0$ bis $x=x$, so wird

$$\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\, x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}\, a^2 . \operatorname{arc tang} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, x \sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}\, a^2 . \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}.$$

Der Ausdruck für die gesuchte Fläche ist also

$$u = \frac{bx}{2a} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{ab}{2} \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}.$$

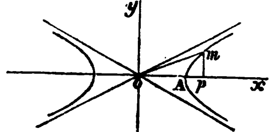
Da $\frac{xy}{2}$ die Fläche des Dreiecks *omp* ist, so muß $\frac{ab}{2} \operatorname{arc sin} \frac{x}{a}$ die Fläche des Sectors *oBm* darstellen.

Setzt man $x = a$, so erhält man $\frac{ab\pi}{4}$ für die Fläche *oBA*; folglich ist $ab\pi$ die Fläche der ganzen Ellipse.

§. 312. Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf ihre Achsen ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2-a^2}.$$

Fig. 46.



Versteht man unter u die Fläche *Apm*, Fig. 46, indem *op* die Abscisse x darstellt, so hat man

$$u = \frac{b}{a} \int_a^x dx \sqrt{x^2-a^2}.$$

Um das unbestimmte Integral $\int dx \sqrt{x^2-a^2}$ zu erhalten, setze man wie oben

$$\sqrt{x^2-a^2} = tx, \quad \text{woraus} \quad x^2 = \frac{a^2}{1-t^2},$$

und

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2} = \int t.xdx = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}\int dt.x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{dt}{1-t^2}.$$

Aber

$$\int\frac{dt}{1-t^2} = \tfrac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right);$$

also

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2} = C + \tfrac{1}{2}tx^2 + \tfrac{1}{4}a^2.l\frac{1-t}{1+t},$$

oder

$$\int dx\sqrt{x^2-a^2} = C + \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \tfrac{1}{4}a^2.l\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= C + \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Nimmt man nun das Integral von $x=a$ bis $x=x$, so kommt

$$\int_0^x dx\sqrt{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Der Ausdruck der Fläche Amp wird also

$$u = \frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{ab}{2}.l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$
$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}.l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Da $\frac{xy}{2}$ die Fläche des Dreiecks omp darstellt, so muß die Fläche des Sectors omA durch $\frac{ab}{2}.l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$ ausgedrückt werden.

Die Fläche wird unendlich groß, wenn der Punkt m ins Unendliche hinausrückt, oder der Radiusvector om mit der Asymptote zusammenfällt.

§. 313. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf ihre Asymptoten ist

$$xy = \frac{a^2}{2}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{a^2}{2x}.$$

Die Fläche u, von der Abscisse x_0 bis zu x gerechnet, wird also ausgedrückt durch

$$u = \frac{a^2}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}, \quad \text{oder} \quad u = \frac{a^2}{2} . l \frac{x}{x_0}.$$

Setzt man $a = 1$, so hat man einfacher

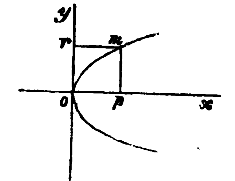
$$u = \tfrac{1}{2} . l \frac{x}{x_0};$$

also liefern die Neper'schen Logarithmen der Zahlen unmittelbar die Flächen der gleichseitigen Hyperbel. Aus diesem Grunde hat man diese Logarithmen auch hyperbolische Logarithmen genannt.

§. 314. Die Gleichung der Parabel, von ihrem Scheitel aus gerechnet, ist

$$y^2 = 2px, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{2px}.$$

Fig. 47.



Die Fläche omp, Fig. 47, wird also dargestellt durch

$$u = \sqrt{2p}\int_0^x dx \sqrt{x},$$

woraus wird

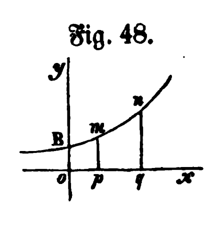
$$u = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p} . x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{oder} \quad u = \tfrac{2}{3}\, xy.$$

Die Fläche *omp* beträgt also $\frac{2}{3}$ des Rechtecks *ormp*; und die Fläche *omr* beträgt $\frac{1}{3}$ desselben.

§. 315. Der Gleichung der logarithmischen Linie kann man nach §. 177 die Gestalt geben

$$y = a^x,$$

Fig. 48.



wo *a* eine positive und die Einheit übertreffende Constante bedeutet. Der Ausdruck für die Fläche *pmnq*, Fig. 48, oder *u*, welche mit den Abscissen *op* oder x_0, und *oq* oder *x* begränzt wird, ist demnach

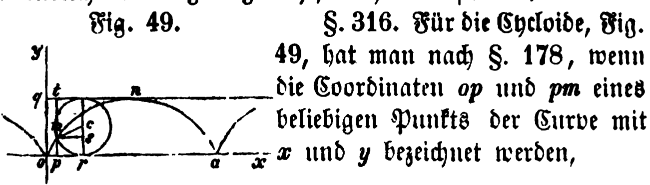
$$u = \int_{x_0}^{x} a^x dx,$$

und da man das unbestimmte Integral hat $\int a^x dx = \frac{a^x}{la}$, so kommt

$$u = \frac{a^x - a^{x_0}}{la}.$$

Die Fläche von *oB* aus nach der Seite der positiven *x* wird also $\frac{a^x - 1}{la}$; und die Fläche von *oB* aus nach der Seite der negativen *x* wird $\frac{1 - a^{-x}}{la}$. Dieser letzte Ausdruck gibt, wenn man darin $x = \infty$ setzt, $\frac{1}{la}$ als Betrag derjenigen Fläche, welche zwischen der Achse und der Curve, beide ins Unendliche verlängert gedacht, enthalten ist.

Fig. 49.



§. 316. Für die Cycloide, Fig. 49, hat man nach §. 178, wenn die Coordinaten *op* und *pm* eines beliebigen Punkts der Curve mit *x* und *y* bezeichnet werden,

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega),$$

wo R den Halbmesser *cr* des erzeugenden Kreises bedeutet, und ω den Winkel *mcr*. Die Fläche *omp* wird ausgedrückt durch

$$u = \int_0^x y dx, \quad \text{oder} \quad u = R^2 . \int_0^\omega d\omega . (1 - \cos\omega)^2 .$$

Aber man hat

$$\begin{aligned} \int d\omega . (1 - \cos\omega)^2 &= \int d\omega . (1 - 2\cos\omega + \cos\omega^2) \\ &= \int d\omega . (\tfrac{3}{2} - 2\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega) \\ &= C + \tfrac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\omega, \end{aligned}$$

folglich

$$u = R^2 (\tfrac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\omega).$$

Um die ganze Fläche *omna* zu erhalten, welche zwischen der Cycloide und der Achse *oa* enthalten ist, hat man in dieser Formel $\omega = 2\pi$ zu setzen. Der Betrag dieser Fläche wird also $3R^2\pi$, d. h. das Dreifache der Fläche des erzeugenden Kreises.

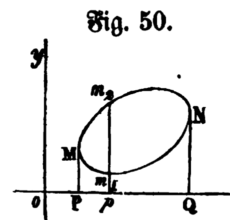
Außerdem kann man bemerken, daß die Fläche

$$\begin{aligned} oqtm = oqtp - omp &= 2Rx - u \\ &= \frac{R^2}{2}(\omega - \sin\omega\cos\omega). \end{aligned}$$

Also ist die Fläche *oqtm* gleich dem Theile *rms* des erzeugenden Kreises, und folglich die Fläche *oqn* gleich der Hälfte dieses Kreises.

§. 317. Auf dem hier befolgten Wege ist es immer möglich, die Größe der Fläche zu bestimmen, welche von irgend einem beliebigen Zuge in einer Ebene umschlossen wird. Es sei *MN*, Fig. 50, ein solcher Zug, den man auf

Fig. 50.



rechtwinklige Coordinaten bezogen habe. Man bezeichne mit x_0 und x_ω die beiden äußersten Abscissen oP und oQ, mit x eine beliebige Abscisse op, und mit y_1 und y_2 die Ordinaten pm_1 und pm_2, welche dieser Abscisse entsprechen und resp. den beiden Curven Mm_1N und Mm_2N, aus denen der Zug zusammengesetzt ist, angehören. Diese Ordinaten müssen als Functionen von x gegeben sein. Aus dem Vorhergehenden ist sodann klar, daß der Inhalt der Fläche $Mm_1\,Mm_2$ durch das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x_\omega} (y_2 - y_1)\, dx$$

ausgedrückt werden wird.*)

---

*) Noch allgemeiner kann man statt dieses Ausdrucks schreiben

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \quad \text{oder} \quad \int_{x_0}^{x_\omega}\int_{y_1}^{y_2} dx\, dy,$$

wo die Gränzen y_1 und y_2 im allgemeinen selbst zwei Functionen von x sind. Dieser Ausdruck bedeutet offenbar eine Summirung sämmtlicher unendlich kleinen Flächenelemente $dxdy$ in einem zweifachen Sinne; nämlich zuerst eine Summirung im Sinne der y, welche durch $dx\int_{y_1}^{y_2} dy$ angezeigt wird nnd wobei dx unberührt bleibt; und sodann eine Summirung der gewonnenen Elemente im Sinne der x.

Für praktische Rechnungen pflegt diese Auffassungsweise nicht nur die bequemere zu sein, sondern auch am meisten gegen Irrthümer zu schützen.

Wenn der Zug $Mm_1\,Nm_2$ discontinuirlich ist, und zwar aus Theilen zusammengesetzt, deren Ordinaten nicht sämmtlich durch die nämliche Function der Abscisse x dargestellt werden, so kann man die vorgelegte Fläche, so wie das bestimmte Integral, welches den Werth derselben ausdrückt, in mehrere Theile zerlegen, entsprechend resp. den Theilen des Zuges, deren Ordinaten unter einen gemeinschaftlichen analytischen Ausdruck fallen. Der Werth eines jeden dieser Theile wird sodann besonders berechnet werden. Selbst in solchen Fällen, wo die Ordinaten nicht durch einen oder mehrere analytische Ausdrücke vermittelst der Abscisse gegeben sind, sondern man nur die numerischen Werthe der Ordinaten von gewissen Punkten des Zuges kennt, gibt es dennoch, wie sich in der Folge zeigen wird, Methoden zur angenäherten Berechnung des bestimmten Integrals, welches die Fläche ausdrückt.

§. 318. Um noch eine Anwendung der Formel des §. 310 zu geben, betrachte man die logarithmische Spirale, deren Gleichung im §. 204 gegeben ist, nämlich

$$r = e^{la.\omega}\,.$$

Die Fläche zwischen der Curve, dem Radiusvector r_0 und dem Radiusvector r, welche beiden letzteren den Winkel $\omega - \omega_0$ mit einander einschließen, wird

$$u = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\,.\,e^{2la.\omega},$$

also

$$u = \frac{e^{2la.\omega} - e^{2la.\omega_0}}{4la}, \quad \text{oder} \quad u = \frac{r^2 - r_0^2}{4la}.$$

In dem besonderen Falle, wo man hat $la = 1$ und $r = e^{\omega}$, beträgt demnach die in Rede stehende Fläche $\frac{1}{4}$ der Differenz der Quadrate, welche man über dem ersten und dem zweiten Radiusvector construiren kann.

2. Bogenlänge der ebenen Curven.

§. 319. Wenn man hier wieder die Betrachtungen des §. 309 in Anwendung bringt und sich erinnert, daß nach §. 157 das Differential des Bogens einer Curve, welche in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x und y durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegeben ist, ausgedrückt wird durch

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

so erhält man offenbar das bestimmte Integral

$$s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

als allgemeinen Ausdruck für die Länge des Bogens, welcher zwischen den beiden Punkten enthalten ist, denen die Abscissen x_0 und x zugehören.

§. 320. Ebenso wenn die Curve in Bezug auf Polarcoordinaten durch die Gleichung gegeben ist

$$r = f(\omega),$$

so hat man nach §. 200 für das Differential des Bogens

$$ds = d\omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2};$$

folglich wird

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$$

der allgemeine Ausdruck für die Länge des Bogens, welcher zwischen den beiden Punkten enthalten ist, denen die Werthe ω_0 und ω des Winkels, welcher die Lage des Radiusvector bestimmt, zugehören.

§. 321. Betrachtet man als Beispiel, wie im §. 311, die Ellipse in Bezug auf ihre Achsen, deren Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{oder} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

so wird

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

folglich hat man

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}$$

als Ausdruck für die Bogenlänge, welche vom Endpunkte der kleinen Achse bis zu demjenigen Punkte gerechnet wird, dessen Abscisse x ist. Führt man die Excentricität ein, welche im §. 197 mit e bezeichnet worden ist, oder setzt man $a^2-b^2=a^2e^2$, so kann man auch schreiben

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

Dieses Integral läßt sich in endlicher Gestalt nicht darstellen,*) aber man kann es auf mehr als eine Art in eine convergirende Reihe verwandeln. Beachtet man z. B.,

---

*) Dasselbe gehört zu der Classe der elliptischen Functionen, welche diesem besonderen Falle ihren Namen verdanken. Eben dahin gehört auch das Integral des nächstfolgenden §. 322, welches die Bogenlänge der Hyperbel ausdrückt. Die allgemeine Form, unter welche jede elliptische Function gebracht werden kann, ist das Integral

$$\int_0^x \frac{Pdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}},$$

daß $\frac{x}{a}$ immer ein ächter Bruch ist, so kann man setzen $x = a \cos\varphi$, woraus $dx = -a \sin\varphi\, d\varphi$, und folglich

$$s = -a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos\varphi^2},$$

und wenn man $(1 - e^2 \cos\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe entwickelt,

$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \left(\frac{e^2}{2}\cos\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\frac{e^4}{4}\cos\varphi^4\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4}\frac{e^6}{6}\cos\varphi^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{e^8}{8}\cos\varphi^8 + \text{ꝛc.}\right).$$

Aber man hat aus der zweiten Gleichung des §. 294

---

wo P eine rationale Function von x bedeutet. Man führt dieses Integral, nach Legendre, auf die drei einfachsten Formen zurück

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2} \,.\, d\varphi = E(c, \varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}} = F(c, \varphi)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin\varphi^2)\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}} = \Pi(n, c, \varphi)$$

indem man φ die Amplitude und c den Modulus des Integrals nennt, c immer < 1 vorausgesetzt. Diese drei Formen erscheinen wie selbständige transcendente Functionen, welche einer Zurückführung auf einfachere Functionen in endlicher Gestalt nicht fähig sind und deren numerische Werthe in Tafeln niedergelegt werden.

$$\int d\varphi \,.\, \cos\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi + C,$$

$$\int d\varphi \,.\, \cos\varphi^4 = \tfrac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1.3}{2.4}\varphi + C,$$

$$\int d\varphi \,.\, \cos\varphi^6 = \tfrac{1}{6}\sin\varphi\cos\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi\cos\varphi^3$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi + C,$$

$$\int d\varphi \,.\, \cos\varphi^8 = \tfrac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi^7 + \frac{1.7}{6.8}\sin\varphi\cos\varphi^5$$

$$+ \frac{1.5.7}{4.6.8}\sin\varphi\cos\varphi^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varphi + C,$$

2c.

und wenn man die Integrale von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \varphi$ nimmt,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \,.\, \cos\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \,.\, \cos\varphi^4 = \tfrac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$- \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \,.\, \cos\varphi^6 = \tfrac{1}{6}\sin\varphi\cos\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6}\sin\varphi\cos\varphi^3$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi \,.\, \cos\varphi^8 = \tfrac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi^7 + \frac{1.7}{6.8}\sin\varphi\cos\varphi^5$$

$$+\frac{1.5.7}{4.6.8}\sin\varphi\cos\varphi^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

ꝛc.

woraus man die Werthe von sämmtlichen Gliedern der obigen Reihe entnehmen kann.

Setzt man in dem gefundenen Ausdrucke für s den Werth $x = a$, folglich $\cos\varphi = 1$ oder $\varphi = 0$, so erhält man folgenden Ausdruck für die Länge des elliptischen Quadranten

$$\frac{a\pi}{2}\Big[1-(\tfrac{1}{2}e)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2$$
$$- \tfrac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - \text{ꝛc.}\Big].$$

§. 322. Die Gleichung der Hyperbel ist

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{oder} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

woraus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Folglich hat man

$$s=\int_a^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{x^2-a^2}}=\int_a^x dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}},$$

oder wenn man $a^2+b^2=a^2e^2$ setzt,

$$s=\int_a^x dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$$

als Ausdruck für die Bogenlänge vom Scheitel der Curve bis zu dem Punkte, dessen Abscisse x ist. Da hier x immer größer als a genommen werden muß, so setze man $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, woraus $dx=\frac{a\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2}$, und mithin

$$s=a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\sqrt{e^2-\cos\varphi^2}=a\int_0^\varphi d\varphi\frac{e}{\cos\varphi^2}\sqrt{1-\frac{\cos\varphi^2}{e^2}},$$

und durch Entwickelung von $\left(1-\frac{\cos\varphi^2}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ erhält man

$$s=a\int_0^\varphi d\varphi\frac{e}{\cos\varphi^2}\Big(1-\frac{1}{2e^2}\cos\varphi^2-\frac{1}{2}\frac{1}{4e^4}\cos\varphi^4$$
$$-\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^6}\cos\varphi^6-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^8}\cos\varphi^8-\text{etc.}\Big)$$

oder

$$s=ae\,\text{tang}\,\varphi-\frac{a}{2e}\varphi-a\int_0^\varphi d\varphi\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos\varphi^2$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos\varphi^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos\varphi^6+\text{etc.}\Big).$$

Die Glieder dieser Reihe werden durch die Ausdrücke des vorigen Paragraphen für $\int d\varphi\,.\,\cos\varphi^2$, $\int d\varphi\,.\,\cos\varphi^4$, etc. gegeben, wenn man darin die willkürliche Constante C gleich Null annimmt.

Mit Berücksichtigung der Asymptote gelangt man zu dem folgenden Schlusse. Die Gleichung der Asymptote ist $y=\frac{b}{a}x$, und mithin der Abstand eines Punkts der Asymptote, dessen Abscisse x ist, von dem Mittelpunkte der Curve $=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x=ex=\frac{ae}{\cos\varphi}$. Es sei r dieser Abstand, so hat man

$$r - s = ae\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a}{2e}\varphi + a\int_0^\varphi d\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4e^3}\cos\varphi^2\right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{6e^5}\cos\varphi^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{8e^7}\cos\varphi^6 + \text{etc.}\right).$$

Setzt man hierin $x = \infty$, mithin $\cos\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man für diejenige Gränze, welcher der Ueberschuß von r über s immer näher kommt, wenn man die Abscisse x größer und größer werden läßt, den Ausdruck

$$\frac{a\pi}{2e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^3}\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

Denn es wird $\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

§. 323. Die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px \quad \text{gibt} \quad y = \sqrt{2px}, \; \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Man erhält also für die Bogenlänge vom Scheitel der Curve bis zu dem Punkte, dessen Abscisse x ist, den Ausdruck

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}.$$

Um das unbestimmte Integral $\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$ zu finden, setze man

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = t \quad \text{woraus} \quad x = \frac{p}{2(t^2-1)};$$

und

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \int dx\,.\,t = xt - \int x dt = xt - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}.$$

Da nun $\int\frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int dt\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$, so wird

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = xt - \frac{p}{4}.l\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$= x\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.l\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}+C;$$

und wenn man das Integral von $x=0$ bis $x=x$ nimmt so erhält man

$$s = x\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-\frac{p}{4}.l\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}.$$

§. 324. Die Gleichung der logarithmischen Linie, §. 315,

$$y = a^x \quad \text{gibt} \quad \frac{dy}{dx} = la.a^x = la.y;$$

man hat also

$$s = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+(la.a^x)^2}$$

für die Länge des Bogens, dessen Endpunkte den Abscissen x_0 und x entsprechen. Um den Werth dieses bestimmten Integrals zu finden, setze man

$$\frac{dy}{dx} = la.y = \text{tang}\,\tau,$$

woraus

$$la.dy = \frac{d\tau}{\cos\tau^2}, \quad dx = \frac{1}{la}\frac{dy}{y} = \frac{1}{la}\frac{d\tau}{\sin\tau\cos\tau},$$

und

$$s = \frac{1}{la}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\sin\tau\cos\tau^2}.$$

Aber aus der vierten Gleichung des §. 293 erhält man

$$\int\frac{d\tau}{\sin\tau\cos\tau^2}=\frac{1}{\cos\tau}+\int\frac{d\tau}{\sin\tau},$$

und aus §. 295

$$\int\frac{d\tau}{\sin\tau}=C+l.\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}.$$

Folglich wird

$$s=\frac{1}{la}\left(\frac{1}{\cos\tau}-\frac{1}{\cos\tau_0}+l\,\frac{\operatorname{tang}\frac{\tau}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\tau_0}{2}}\right).$$

Hier bedeutet, wie bekannt ist, $\tau=\operatorname{arc}\operatorname{tang}(la\,.\,y)$ den Winkel zwischen der Achse der x und der Tangente der Curve in demjenigen Punkte, dessen Abscisse x ist.

§. 325. Aus der Gleichung der Cycloide, §. 316, hat man nach §. 178

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2Ry-y^2}}{y},\quad\text{oder}\quad\frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{2Ry-y^2}}.$$

Da man nun das Differential $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ des Bogens einer Curve auch ausdrücken kann durch $dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, so erhält man hier

$$s=\int_0^y dy\sqrt{1+\frac{y^2}{2Ry-y^2}}=\sqrt{2R}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{2R-y}}$$

als Ausdruck für die Bogenlänge zwischen dem Anfangspunkte der Curve und dem Punkte, dessen Ordinate y ist. Und da ferner

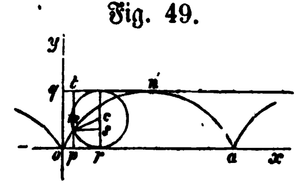
$$\int\frac{dy}{\sqrt{2R-y}}=C-2\sqrt{2R-y},$$

so wird

$$s = 4R - 2\sqrt{2R}\sqrt{2R-y}.$$

Man erhält hieraus, indem man $y=2R$ setzt, für die Hälfte der Cycloide den Werth $4R$. Will man ferner die Ordinaten y von oben nach unten rechnen, indem man die Linie nq, Fig. 49, als Abscissenachse ansieht, und ebenso den Bogen s von dem Punkte n aus in dem Sinne nmo, so hat man $2R-y$ statt y, und $4R-s$ statt s zu setzen, wodurch man erhält

Fig. 49.



$$s = 2\sqrt{2Ry}.$$

Derselbe Ausdruck wurde auf anderem Wege schon im §. 191 gefunden.

§. 326. Die logarithmische Spirale wird, in Bezug auf Polarcoordinaten, durch die Gleichung gegeben

$$r = e^{la.\omega}, \quad \text{woraus} \quad \frac{dr}{d\omega} = la.e^{la.\omega} = la.r.$$

Man erhält also nach §. 320

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \sqrt{r^2+(la)^2 r^2} = \sqrt{1+(la)^2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . e^{la.\omega},$$

und daraus

$$s = \frac{\sqrt{1+(la)^2}}{la}\,(r-r_0)$$

für die Bogenlänge, welche zwischen den beiden Punkten der Curve enthalten ist, denen die Radien r_0 und r zugehören.

Nach §. 204 hat der Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvector zu seiner trigonometrischen Tangente

den Ausdruck $\frac{1}{la}$, und folglich zu seinem Cosinus den in der vorstehenden Gleichung enthaltenen Ausdruck $\frac{la}{\sqrt{1+(la)^2}}$. Es ist übrigens schon aus der Natur der logarithmischen Spirale klar, daß die Differenz zweier Radien zu der Länge des Bogens, den dieselben einschließen, in einem constanten Verhältniß steht, welches durch diesen Cosinus ausgedrückt wird.

Wenn die Gleichung der logarithmischen Spirale die einfachere Gestalt hat $r=e^{\omega}$, so erhält man $s=(r-r_0)\sqrt{2}$. Die Länge des Bogens zwischen zwei beliebigen Punkten dieser Curve ist also gleich der Differenz der Diagonalen zweier Quadrate, welche man über den Radien construiren kann, die diesen Punkten angehören.

3. Bogenlänge der Curven von doppelter Krümmung.

§. 327. Eine Curve von doppelter Krümmung sei durch die beiden Gleichungen gegeben

$$y=f(x), \quad z=F(x);$$

man hat alsdann nach §. 227 als allgemeinen Ausdruck für das Differential ihres Bogens

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Nach Maßgabe der im Anfange dieses Abschnitts angestellten Betrachtungen erhält man daraus

$$s=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

als Ausdruck für die Länge des Bogens, dessen beiden Endpunkte den Abscissen x_0 und x entsprechen.

§. 328. Als Beispiel nehme man die Schraubenlinie, welche durch die Gleichungen gegeben wird

$$x = R \cos \omega, \quad y = R \sin \omega, \quad z = Ra\omega,$$

aus denen folgt

$$dx = -R \sin \omega \, d\omega, \quad dy = R \cos \omega \, d\omega, \quad dz = Ra \, d\omega.$$

Der vorige Ausdruck nimmt hier die Gestalt an

$$s = R\sqrt{1+a^2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = R\sqrt{1+a^2}.(\omega - \omega_0),$$

welches Resultat man leicht, zufolge der Beschaffenheit der Curve, voraussehen konnte.

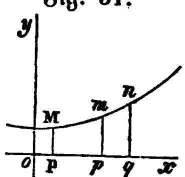
4. Inhalt der Rotationskörper.

§. 329. Ein Rotationskörper entsteht durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene enthaltene gerade Linie, als Achse. Man nehme diese Achse zur Achse der x, und es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung der ebenen Curve Mm, Fig. 51, welche bei ihrer Umdrehung um diese Achse die Oberfläche des Körpers beschreibt. Legt man sodann durch die beiden Punkte P und p Ebenen rechtwinklig zur Achse der x, und bezeichnet mit v den Theil des Körpers, welcher zwischen diesen Ebenen enthalten ist, d. h. welcher durch die Umdrehung der Fläche $PMmp$ beschrieben wird, so besteht die hier zu lösende Aufgabe darin, einen Ausdruck für v zu finden.

Fig. 51.



Es sei x die Abscisse op, so ist klar, daß wenn x um die Größe Δx, oder in der Figur um pq zunimmt, das Volumen v gleichzeitig um eine Größe Δv zunehmen wird, welche dem durch Umdrehung der Fläche $pmnq$ beschriebenen Volumen gleich ist. Wird nun Δx klein genug vorausgesetzt, so daß y in dem Intervalle pq beständig zunimmt oder beständig abnimmt, so ist das zuletzt genannte Volumen, seiner Größe nach, zwischen zwei Cylindern enthalten, welche zu ihrer gemeinschaftlichen Höhe pq, und zu Halbmessern pm und qn haben. Man hat also

$$\Delta v > \pi y^2 \Delta x, \quad \Delta v < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x;$$

oder

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi y^2, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2.$$

Da diese beiden Ausdrücke zu ihrer gemeinschaftlichen Gränze, sobald man Δx mehr und mehr abnehmen läßt, den Ausdruck πy^2 haben, so erhält man endlich

$$\frac{dv}{dx} = \pi y^2, \quad \text{oder} \quad dv = \pi y^2\, dx$$

als allgemeinen Ausdruck für das Differential des Volumen v.

Hieraus erkennt man unmittelbar, daß das bestimmte Integral

$$v = \pi \int_{x_0}^{x} y^2\, dx$$

denjenigen Theil vom Volumen eines Rotationskörpers ausdrückt, welcher zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die in den Abständen x_0 und x vom Anfangspunkte der Coordinaten rechtwinklig durch die Achse der x gelegt worden sind.

§. 330. In einem Rotations-Ellipsoid sei $2a$ die Rotationsachse und $2b$ die auf ihr rechtwinklige Achse. Die

Gleichung der erzeugenden Curve ist, wenn man die Coordinaten vom Mittelpunkte rechnet

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Man erhält also

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2}\int_0^x (a^2 - x^2)\, dx$$

für den Theil des körperlichen Inhalts, welcher zwischen zwei rechtwinklig zur Achse gelegten Ebenen enthalten ist, von denen die eine durch den Mittelpunkt geht und die andere die Achse in dem Abstande x vom Mittelpunkte schneidet. Die Ausführung der Integration gibt

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Setzt man $x = a$, so erhält man $\frac{2\pi}{3}ab^2$ für den Inhalt des halben Rotations-Ellipsoids. Der Inhalt des ganzen Körpers wird also $\frac{4\pi}{3}ab^2$.

§. 331. Auf dem angezeigten Wege berechnet man leicht den Inhalt eines jeden Körpers, der durch Rotation einer beliebigen ebenen Figur um eine in ihrer Ebene enthaltene Achse zu Stande kommt. Denkt man sich z. B. die Figur Mm_1Nm_2, Fig. 50, welche in der Ebene xy enthalten ist, um die Achse der x gedrehet, so wird der Inhalt des entstandenen Körpers ausgedrückt durch das bestimmte Integral

Fig. 50.

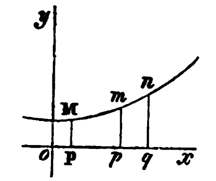
$$\pi\int_{x_0}^{x_\omega} (y_2^2 - y_1^2)\, dx,$$

wo x_0 und x_ω den kleinsten Werth oP und den größten Werth oQ der Abscisse x bezeichnen, und y_1 und y_2 die Werthe der Ordinaten pm_1 und pm_2 der beiden Curven Mm_1N und Mm_2N, ausgedrückt durch die Abscisse x.

5. Inhalt der Rotationsflächen.

§. 332. Es sei die Rotationsfläche zu betrachten, welche durch Umdrehung einer ebenen Curve Mm, Fig. 51, deren Gleichung ist

Fig. 51.



$$y = f(x),$$

um die Achse der x beschrieben wird. Man sucht den Inhalt u desjenigen Theils dieser Fläche, welcher durch die Umdrehung des Theils Mm der Curve entsteht.

Man bezeichne die Abscisse op mit x. Wenn x um das unendlich kleine Intervall dx, in der Figur pq, zunimmt so wird die Fläche u um diejenige Fläche wachsen, welche durch Umdrehung des Elements mn oder ds beschrieben wird. Aber man kann, innerhalb der Ausdehnung dieses Elements, die Curve als zusammenfallend mit ihrer Tangente ansehen, und folglich die genannte Zunahme von u wie die Oberfläche eines abgestumpften Kegels, von welchem pq die Höhe und pm und qn die Halbmesser der beiden Grundflächen sind. Also wird

$$du = \pi\,(2y + dy)\,ds,$$

und wenn man die unendlich kleinen Größen der zweiten Ordnung wegwirft, so hat man endlich*)

---

*) Es ist nicht schwer, dieser Herleitung dieselbe strengere Form zu geben, wie im §. 329, wenn man nämlich gleichfalls von endlichen Differenzen Δx, Δy, Δu ausgeht und hinterher erst deren Gränzwerthe betrachtet.

$$du = 2\pi y\, ds \quad \text{oder} \quad du = 2\pi dx \,.\, y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx \,.\, y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

als Ausdruck für den Inhalt des Theils der Rotationsfläche, welcher zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die in den Abständen x_0 und x von dem Anfangspunkte der Coordinaten rechtwinklig zur Achse liegen.

§. 333. Nimmt man als Beispiel das Rotations-Ellipsoid aus §. 330, so erhält man aus der Gleichung der erzeugenden Curve

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \text{und } \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

folglich

$$u = 2\pi \frac{b}{a}\int_0^x dx \sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}$$

für den Inhalt des Theils der Fläche, welcher von zwei auf der Achse rechtwinkligen Ebenen begränzt wird, von denen die eine durch den Mittelpunkt geht und die andere den Abstand x vom Mittelpunkte besitzt.

Um die Integration auszuführen, sei erstens $a > b$, d. h. die Umdrehung der Ellipse habe um die große Achse stattgefunden. Man setze $\frac{a^2-b^2}{a^2} = e^2$, wo e die Excentricität bedeutet, so hat man

$$u = 2\pi \frac{b}{a}\int_0^x dx \sqrt{a^2 - e^2 x^2};$$

und wenn man schreibt

$$u = 2\pi \frac{b}{ae}\int_0^x e\,dx \sqrt{a^2 - e^2 x^2},$$

so findet man nach §. 311

$$u = 2\pi\frac{b}{ae}\left(\tfrac{1}{2}\, ex\sqrt{a^2-e^2x^2}+\tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{ex}{a}\right)$$

$$=\pi b\left(x\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^2}}+\frac{a}{e}\arcsin\frac{ex}{a}\right).$$

Setzt man $x=a$, so kommt

$$\pi ab\left(\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{e}\arcsin e\right)$$

oder

$$\pi\left(b^2+\frac{ab}{e}\arcsin e\right)$$

für den Inhalt der halben Oberfläche des Ellipsoids.

Es sei zweitens $a<b$, d. h. die Umdrehung der Ellipse habe um die kleine Achse stattgefunden. Man bezeichne wieder mit e die Excentricität, so daß $\frac{b^2-a^2}{b^2}=e^2$, so kommt

$$u=2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}},$$

wofür man schreiben kann

$$u=\frac{2\pi}{e}\int_0^x\frac{be.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}.$$

Nun findet man, wie im §. 312, das unbestimmte Integral

$$\ldots\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}=C+\frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}+\frac{a^2}{2}.l\left(\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}\right);$$

und wenn man das Integral von $x=0$ bis $x=x$ nimmt,

$$\ldots\frac{.dx}{a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}=\frac{bex}{2a}\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}+\frac{a^2}{2}.l\frac{\frac{bex}{a}+\sqrt{a^2+\frac{b^2e^2x^2}{a^2}}}{a}.$$

Folglich wird

$$u = \pi \left[\frac{bx}{a} \sqrt{a^2 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{e} . l \frac{\frac{bex}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^2}}}{a} \right]$$

$$= \pi b \left[x \sqrt{1 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{be} . l \left(\frac{bex}{a^2} + \sqrt{1 + \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4}} \right) \right].$$

Setzt man $x = a$, so kommt

$$\pi ab \left[\sqrt{1 + \frac{b^2 e^2}{a^2}} + \frac{a}{be} . l \left(\frac{be}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2 e^2}{a^2}} \right) \right],$$

oder

$$\pi \left[b^2 + \frac{a^2}{e} . l (1+e) \frac{b}{a} \right],$$

für den Inhalt der halben Oberfläche des Ellipsoids.

§. 334. Man kann nach dem Vorstehenden den Inhalt einer jeden Rotationsfläche berechnen, welche durch eine beliebige ebene Curve beschrieben wird, wenn diese sich um eine in ihrer Ebene angenommene Achse drehet. Wenn man nämlich die Bezeichnungen des §. 331 beibehält, so wird der Inhalt der durch Umdrehung der Curve $Mm_1 Nm_2$ um die Achse der x entstehenden Fläche dargestellt durch das bestimmte Integral

$$2\pi \int_{x_0}^{x_\omega} dx \left[y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2} + y_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2} \right].$$

6. Inhalt der Körper von beliebiger Gestalt.

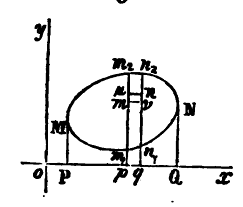
§. 335. Wenn die Oberfläche eines Körpers in Bezug auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Gleichung gegeben ist

$$z = f(x, y),$$

so kann man die Frage nach der Inhaltsbestimmung dieses Körpers allgemein so auffassen, daß man in der Ebene xy

einen beliebigen Umriß Mm_1Nm_2, Fig. 52, zeichnet und sodann dasjenige Volumen zu kennen verlangt, welches zwischen der Ebene xy, die Oberfläche des Körpers, und derjenigen Cylinderfläche enthalten ist, deren Basis durch jenen Umriß gebildet wird und deren Erzeugungslinien parallel mit der Achse der z liegen. Es seien x_0 und x_ω die äußersten Abscissen oP und oQ der Curve Mm_1Nm_2; ferner seien y_1 und y_2 die Ordinaten pm_1 und pm_2, welche der Abscisse op oder x zugehören, und sich resp. auf die Arme Mm_1N und Mm_2N dieser Curve beziehen. Die Größen y_1 und y_2 werden gegebene Functionen der Abscisse x sein.

Fig. 52.



Man betrachte nun denjenigen Theil des gesuchten Volumen, dessen Basis auf der Ebene xy ist Mm_1m_2, und bezeichne seinen Werth, welcher eine Function von x sein wird, mit v. Wenn die Abscisse op oder x um die unendlich kleine Größe dx, in der Figur durch pq dargestellt, zunimmt, so wird das Volumen v um einen gleichfalls unendlich kleinen Theil zunehmen, dessen Basis in der Ebene xy ist $m_1n_1n_2m_2$. Dieser Theil entspricht also dem Differential dv; und aus den Betrachtungen im Anfange dieses Abschnitts geht hervor, daß man hat

$$v = \int_{x_0}^{x} dv;$$

und daß das ganze Volumen, von welchem die Figur Mm_1Nm_2 die Basis ist, ausgedrückt wird durch

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dv.$$

Es handelt sich jetzt noch um den analytischen Ausdruck dieses Differentials dv, d. h. des unendlich kleinen Theils von dem gesuchten Volumen, dessen Basis ist $m_1n_1n_2m_2$; welches Differential also nichts anderes ist als eine Schicht zwischen zwei Ebenen, die parallel mit der Ebene yz und in den Abständen x und $x+dx$ von dieser Ebene liegen. Man betrachte einen beliebigen Punkt m der Linie $m_1\,m_2$; es sei y die Coordinate pm dieses Punkts, und $z=f(x,y)$ die ihm zugehörige Ordinate der Fläche, durch welche der Körper begränzt wird. Die Fläche m_1n_1vm bildet die Basis von einem Theile derjenigen Schicht, um deren Bestimmung es sich handelt, und dieser Theil ist augenscheinlich eine Function von pm oder y. Wenn y um die unendlich kleine Größe dy, in der Figur $m\mu$, zunimmt, so wird der in Rede stehende Theil der Schicht, dessen Basis ist m_1n_1vm, um einen unendlich kleinen Raumtheil der zweiten Ordnung wachsen, welcher das Rechteck $mvn\mu$ zur Basis hat. Aber dieser Raumtheil ist offenbar zwischen zwei rechtwinkligen Prismen enthalten, deren gemeinschaftliche Basis ist $mvn\mu$, und von denen das eine die kleinste, und das andere die größte von den vier Ordinaten zur Höhe hat, welche den vier Punkten m, v, n, μ zugehören. Und da diese beiden Höhen sich von der Ordinate z des Punktes m nur um ein unendlich Kleines unterscheiden, so muß man sie wie gleich z ansehen, und folglich das Product $dx.dy.z$ als den Ausdruck desjenigen Zuwachses nehmen, welchen der Theil der Schicht, dessen Basis m_1n_1vm ist, erfährt, sobald y um dy größer wird. Man wird also diese Schicht selbst betrachten wie die Summe einer unendlich großen Anzahl von Differentialen von der Form $dx.dy.z$, in denen dx ein gemeinschaftlicher constanter Factor ist. Hieraus folgt, daß das Integral $dx\int zdy$, zwischen denjenigen beiden Gränzen genommen, welche den Punkten m_1 und m_2 entsprechen, d. h.

von $y=y_1$ bis $y=y_2$, ein Resultat geben wird, welches von dem Volumen der gesuchten Schicht nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung abweicht, so daß man dieses letztere im Vergleich zu dem Volumen selbst, welches ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist, vernachlässigen darf. Man wird also setzen

$$dv = dx \int_{y_1}^{y_2} z dy;$$

und wenn man diesen Werth in den obigen Ausdruck für v substituirt, so kommt

$$v = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy$$

als allgemeiner Ausdruck für den Theil des gesuchten Volumen, welcher zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die in den Abständen x_0 und x vom Anfangspunkte der Coordinaten parallel zu der Ebene yz gelegt worden sind. Daraus endlich wird

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} z dy$$

als Ausdruck für das ganze Volumen.*)

---

*) Man kann ebenso, wie in der Anmerkung, Seite 349, diesem Integrale die allgemeinere Gestalt geben

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \text{oder} \quad \int_{x_0}^{x_\omega} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dx\, dy\, dz,$$

wo im allgemeinen die Gränzen z_1 und z_2 zwei Functionen von x und y, und die Gränzen y_1 und y_2 zwei Functionen von x sind. Der Ausdruck bedeutet in dieser Form eine Summirung der unendlich kleinen Körperelemente $dx\,dy\,dz$ in einem dreifachen Sinne; zuerst eine Summirung im Sinne der z, wobei dx und dy als constante Factoren unberührt bleiben; sodann eine Summirung der ge-

Die gefundenen Formeln heißen **doppelte bestimmte Integrale**, weil sich die Integration auf die beiden Veränderlichen x und y erstreckt. Ihr Werth ist immer durch die bisher gegebenen Methoden zu finden. Nachdem man nämlich für z seinen Werth $f(x, y)$ an die Stelle gesetzt hat, nimmt man in Bezug auf y das unbestimmte Integral $\int f(x,y)\,dy$, indem man x wie constant ansieht. Dieses Integral muß sodann zwischen den Gränzen y_1 und y_2 genommen werden, und da diese Gränzen gegebene Functionen von x sind, so wird das Resultat eine Function von x allein werden. Es sei $\Phi(x)$ diese Function, so hat man schließlich noch das Integral $\int_{x_0}^{x} \Phi(x)\,dx$ zu nehmen.

Man bemerkt übrigens leicht, daß in dem Werthe eines doppelten bestimmten Integrals nichts geändert wird, wenn man rücksichtlich der beiden Veränderlichen die Ordnung der Integrationen umkehrt. Man hat immer

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx \int_{y_1}^{y_2} z\,dy = \int_{y_0}^{y_\omega} dy \int_{x_1}^{x_2} z\,dx,$$

worin x_1 und x_2 diejenigen beiden Werthe von x, ausgedrückt durch y, bedeuten, welche man aus der Gleichung der Curve MN zieht und welche resp. denjenigen beiden Theilen dieser Curve angehören, die das Integral im Sinne der x begränzen; wogegen y_0 und y_ω die beiden äußersten Werthe bezeichnen, welche der Ordinate y derselben Curve zukommen. Es ist nämlich klar, daß der eine wie der andere dieser beiden Ausdrücke den Werth des gesuchten Volumen

---

wonnenen Elemente im Sinne der y, wobei dx unberührt bleibt; und endlich eine Summirung der zuletzt gewonnenen Elemente im Sinne der x.

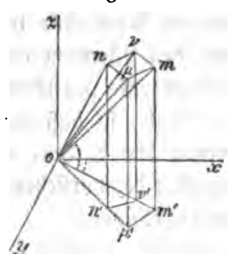
darstellt. Aber man darf nicht aus den Augen verlieren, daß die Anwendung der in Rede stehenden Ausdrücke im allgemeinen voraussetzt, daß keiner von den Werthen der Ordinate z innerhalb der Gränzen des Integrals unendlich groß werde. Wäre dieses dagegen der Fall, so daß zur Auffindung des Integrals die Vorschriften des §. 306 in Kraft treten müßten, so würde die Gültigkeit der vorstehenden Gleichung nicht mehr verbürgt werden können.

§. 336. Wenn die Oberfläche des Körpers auf Polarcoordinaten bezogen werden soll, so betrachtet man die Lage irgend eines Punkts m, Fig. 53, wie gegeben 1) durch die Länge r des Radiusvector om, welcher vom Anfangspunkte o der Coordinaten nach diesem Punkte hinführt; 2) durch den Winkel φ, welchen die Projection om' dieses Radiusvector auf die Ebene xy mit der Achse der x einschließt; und 3) durch den Winkel ψ, welchen derselbe Radiusvector om mit dieser Projection bildet. Die Oberfläche des Körpers selbst wird gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$r = f(\varphi, \psi).$$

Um das Problem der Inhaltsbestimmung in der nöthigen Allgemeinheit zu behandeln, suche man den Inhalt eines Kegels, dessen Spitze im Punkte o liegt und dessen Basis ein gegebener Theil der Oberfläche des Körpers bildet. Der Umriß dieser Basis muß festgestellt werden, und dies kann dadurch geschehen, daß man angibt, daß irgend beliebigen Werthen des Winkels φ stets zwei davon abhängige Werhe ψ_1 und ψ_2 des Winkels ψ zugehören sollen, die sich resp. auf zwei Punkte dieses Umrisses beziehen, von denen der eine in dem unteren Arme und der andere in dem oberen Arme desselben enthalten ist.

Fig. 53.



Es sei nun m irgend ein Punkt in der Oberfläche des Körpers; dem die Coordinaten φ, ψ und r zugehören. Man nehme an, φ wachse um $d\varphi$, oder in der Figur um den Winkel $m'o\mu'$; und ψ wachse um $d\psi$, oder in der Figur um den Winkel mov. Dadurch kommt ein pyramidalischer Raum zu Stande, dessen Spitze im Pol o liegt; und wenn man durch den Punkt m eine Ebene rechtwinklig auf den Radiusvector om legt, so bildet das in dieser Ebene enthaltene Rechteck $m\mu n v$ die Grundfläche der genannten Pyramide. Die Seite $m\mu$ dieses Rechtecks ist gleich ihrer Projection $m'\mu'$ auf die Ebene xy, und da $om' = r\cos\psi$ ist, so wird $m\mu = r\cos\psi\, d\varphi$. Die Seite mv desselben Rechtecks ist gleich $rd\psi$. Folglich wird das Volumen der in Rede stehenden Pyramide

$$\tfrac{1}{3}\, r \,.\, r\cos\psi\, d\varphi \,.\, rd\psi$$

oder

$$\tfrac{1}{3}\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, r^3 \cos\psi,$$

und es ist klar, daß dasselbe von dem Volumen, welches zwischen den Seitenflächen derselben Pyramide und der Oberfläche des Körpers enthalten ist, nur um ein unendlich Kleines der dritten Ordnung abweicht.

Wenn man nun erstens das Integral nimmt

$$\tfrac{1}{3}\, d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \,.\, r^3 \cos\psi,$$

so erhält man das Volumen der Körperschicht, welche zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die durch die Achse der z gehen und die Ebene xy in den Linien om' und $o\mu'$ schneiden.

Wenn man zweitens das Integral nimmt

$$\tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \,.\, r^3 \cos\psi,$$

so erhält man das Volumen von demjenigen Theile des Körpers, welcher zwischen zwei Ebenen enthalten ist, die durch die Achse der z gehen und mit der Ebene xz die Winkel φ_0 und φ einschließen. Folglich wenn φ_0 und φ_ω den kleinsten und den größten Werth des Winkels φ bezeichnen, welche der Basis des gesuchten Kegels angehören, so wird das ganze Volumen desselben dargestellt werden durch

$$\tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_\omega} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \,.\, r^3 \cos\psi.$$

Die Werthe dieser doppelten Integrale werden augenscheinlich auf dieselbe Weise gefunden, welche am Schlusse des vorigen Paragraphen aus einander gesetzt worden ist.

§. 337. Liegt der Pol im Innern des Körpers, und will man den Werth von dem Volumen des ganzen Körpers ausdrücken, so hat man $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ als die Gränzwerthe des Winkels ψ, so wie 0 und 2π als die Gränzwerthe des Winkels φ anzusehen. Der Ausdruck für dieses Volumen wird also

$$\tfrac{1}{3}\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \,.\, r^3 \cos\psi.$$

§. 338. Um eine Anwendung dieser allgemeinen Formeln zu geben, sei das Volumen des Ellipsoids zu bestimmen, dessen Gleichung in Bezug auf seine Achsen ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{oder } z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

wo a, b, c die drei Halbachsen des Ellipsoids bedeuten, welche resp. mit den Achsen der x, y, z zusammenfallen. Die Schnittlinie der Oberfläche des Körpers durch die Ebene xy hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{oder } y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

und dieser Werth begränzt den Körper im Sinne der y. Die Gränzen des Körpers im Sinne der x bilden die Abscissen $x=-a$ und $x=a$. Also wird das Volumen der Hälfte des Ellipsoids, welche oberhalb der Ebene xy liegt, ausgedrückt durch das doppelte Integral

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \,.\, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

wofür man schreiben kann

$$\frac{c}{b}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy \,.\, \sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}.$$

Nun hat man erstens

$$\int_{-\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}}^{\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}} dy \,.\, \sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}-y^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2},$$

weil die linke Seite dieser Gleichung augenscheinlich die Fläche eines Halbkreises darstellt, dessen Halbmesser ist $\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}$. Sodann bleibt noch das Integral zu nehmen

$$\frac{c}{b}\int_{-a}^{a} dx \cdot \frac{\pi}{2}\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}, \quad \text{oder } \frac{\pi bc}{2a^2}\int_{-a}^{a} dx \cdot (a^2-x^2),$$

dessen Werth ist $\frac{2\pi}{3} abc$. Mithin wird $\frac{4\pi}{3} abc$ das Volumen des ganzen Ellipsoids.

§. 339. Die vorstehende Formel gibt, in Uebereinstimmung mit den bekannten geometrischen Sätzen, $\frac{4\pi}{3}a^3$ für das Volumen einer Kugel, deren Halbmesser a ist. Dieses Resultat kann man aber auch auf einfache Weise durch die Formel des §. 337 finden. Denn da die Gleichung der Oberfläche der Kugel für Polarcoordinaten die einfache Gestalt hat $r=a$, so wird der Ausdruck für das Volumen

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot \cos\psi.$$

Aber man hat erstens

$$\int d\psi \cdot \cos\psi = C + \sin\psi, \quad \text{woraus} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot \cos\psi = 2;$$

und sodann

$$\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3}a^3.$$

7. Inhalt der Flächen von beliebiger Gestalt.

§. 340. Die allgemeine Berechnung des Inhalts einer Fläche, deren Gleichung in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten sei

$$z = f(x, y),$$

hängt von ähnlichen Betrachtungen ab wie im §. 335. Jede

Aufgabe dieser Art, welche vorgelegt werden kann, läßt sich auf die Bestimmung des Werths von einem solchen Theile einer Fläche zurückführen, welcher durch einen Umriß begränzt wird, dessen Projection auf die Ebene xy durch die Curve MN, Fig. 52, gegeben ist. Mit Beibehaltung der Bezeichnungen des §. 335 sei v der Werth des in Rede stehenden Flächentheils, so daß v eine bestimmte Function der Abscisse op oder x darstellt. Das Intervall pq sei dx, und der Theil der gesuchten Fläche, welcher in $m_1n_1n_2m_2$ auf die Ebene xy projicirt erscheint, sei dv. Man hat sodann als Ausdruck für v

Fig. 52.

$$v = \int_{x_0}^{x} dv,$$

und als Ausdruck für die ganze gesuchte Fläche, welche in Mm_1Nm_2 projicirt ist,

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dv.$$

Aber die in $m_1n_1n_2m_2$ projicirte Fläche ist die Summe einer unendlich großen Anzahl von Elementen, von denen eines seine Projection in $mvn\mu$ hat, einem Rechteck, dessen Seiten sind $mv = dx$ und $m\mu = dy$. Nun erhält man den Ausdruck für das in Rede stehende Element der Fläche, wenn man bemerkt, daß die gegebene Fläche innerhalb der Ausdehnung dieses Elements kann als zusammenfallend angesehen werden mit der berührenden Ebene in demjenigen Punkte der Fläche, dessen Projection m ist. Ferner ist der Inhalt einer beliebigen in einer Ebene enthaltenen Figur jederzeit gleich der Projection dieser Figur auf eine zweite Ebene, dividirt durch den Cosinus des Neigungswinkels beider

Ebenen. Folglich wenn man aus §. 217 den Ausdruck für den Cosinus des Winkels nimmt, den die berührende Ebene der gegebenen Fläche mit der Ebene xy einschließt, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},$$

so erhält man augenscheinlich für das Element der Fläche, welches in dem Rechteck $mvn\mu$ projicirt erscheint, den Ausdruck

$$dx\,dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Daraus folgt, mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Größe der zweiten Ordnung,

$$dv = dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

wo y_1 und y_2 die Ordinaten pm_1 und pm_2 bedeuten, welche als Functionen von x gegeben sind. Mithin wird der Ausdruck für denjenigen Theil der gesuchten Fläche, dessen Projection Mm_1m_2 ist,

$$v = \int_{x_0}^{x} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1},$$

und endlich für die ganze Fläche

$$\int_{x_0}^{x_\omega} dx\int_{y_1}^{y_2} dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Man kann bemerken, daß wenn man in diesem Ausdruck $\frac{dz}{dx}=0$ und $\frac{dz}{dy}=0$ setzt, man wieder zu dem Ausdrucke des §. 317 für den Inhalt einer ebenen Fläche, deren Umriß durch eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, zurückgelangt.

§. 341. Als Anwendung der vorstehenden allgemeinen Formel möge der Inhalt einer Kugelfläche gesucht werden, deren Gleichung ist

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad \text{oder} \quad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt legt, und unter a den Halbmesser der Kugel versteht. Diese Gleichung gibt

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

und die Begränzung der Fläche im Sinne der y wird durch die Gleichung gegeben

$$x^2+y^2=a^2, \quad \text{oder} \quad y=\sqrt{a^2-x^2},$$

welche dem Durchschnitte dieser Fläche mit der Ebene xy angehört. Man erhält also für den Inhalt der halben Kugelfläche, welche oberhalb der Ebene xy liegt,

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}+1}$$

oder

$$a\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Aber es ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=C+\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

folglich mit Rücksicht auf die angezeigten Gränzen

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\pi.$$

Es bleibt also schließlich noch das Integral zu nehmen

$$a\pi\int_{-a}^{a} dx,$$

dessen Werth ist $2a^2\pi$. Folglich ist $4a^2\pi$ der Inhalt der ganzen Kugelfläche.

Zusätze.

I. Der Rest der Taylor'schen und der Maclaurin'schen Reihe.

Cauchy hat den Rest der Taylor'schen so wie der Maclaurin'schen Reihe unter einer neuen Form dargestellt, welche man auf folgende Weise erhalten kann.

Man bezeichne mit $\varphi(z)$ die Größe

$$)-f(z)-\frac{x-z}{1}f'(z)-\frac{(x-z)^2}{1.2}f''(z)\ldots-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z),$$

welche für $z=x$ verschwindet. Differentiirt man in Bezug auf z und läßt diejenigen Glieder hinweg, welche sich gegenseitig aufheben, so kommt

$$\varphi'(z)=-\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}f^{(n)}(z).$$

Aber da $z=x+(z-x)$ ist, so erhält man durch Anwendung der Taylor'schen Reihe, indem man dieselbe auf zwei Glieder beschränkt,

$$\varphi(z)=\varphi(x)+(z-x)\varphi'[x+\theta_1(z-x)],$$

wo θ_1 eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet. Wegen $\varphi(x)=0$ reducirt sich diese Gleichung auf

$$\varphi(z)=(z-x)\varphi'[x+\theta_1(z-x)],$$

und wenn man für die Function φ' ihren obigen Werth setzt,

$$\varphi(z) = \frac{\theta_1^{n-1}(x-z)^n}{1.2\ldots.(n-1)} f^{(n)}[x+\theta_1(z-x)]$$

oder auch, indem man für θ_1 schreibt $1-\theta$, so daß θ gleichfalls eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bedeutet,

$$\varphi(z) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-z)^n}{1\,.\,2\ldots\ldots.(n-1)} f^{(n)}[z+\theta(x-z)].$$

Setzt man für $\varphi(z)$ seinen Werth, so hat man

$$f(x)=f(z)+\frac{x-z}{1}f'(z)+\frac{(x-z)^2}{1.2}f''(z)+\ldots$$

$$+\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(z)+\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-z)^n}{1.2.3\ldots\ldots.(n-1)}f^{(n)}[z+\theta(x-z)].$$

Dies ist die Taylor'sche Reihe mit ihrem Reste.

Setzt man hierin $z=0$, so hat man

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$

$$+\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x).$$

Dies ist die Maclaurin'sche Reihe mit ihrem Reste.

Die hier gegebene Form für den Rest der Taylor'schen Reihe kann auch dazu gebraucht werden, die in den §§. 99 und 101 nur unvollständig gegebenen Beweise zu ergänzen.

II. Brüche, welche unter die Form $\frac{\infty}{\infty}$ fallen.

Wenn ein Bruch

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

für einen besonderen Werth a von x die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so kann man nach §. 94 2c. den wahren Werth A dieses

Bruches finden, wenn man für denselben den Quotienten der derivirten Functionen von Zähler und Nenner, d. h. den Bruch

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

an die Stelle setzt, und in diesem Bruche $x = a$ werden läßt. Diese Regel bleibt aber auch in dem Falle anwendbar, wo der gegebene Bruch für den Werth $x = a$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint.

Um dies zu beweisen, setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

wo, in Folge der Voraussetzung, der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhält. Sein wahrer Werth A wird also gefunden, wenn man von Zähler und Nenner dieses Bruchs die derivirte Function nimmt, wodurch derselbe sich verwandelt in

$$\frac{-\frac{F'(x)}{F(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}}, \quad \text{d. i. in } \frac{F'(x)}{f'(x)}\frac{f(x)^2}{F(x)^2},$$

und hierin $x = a$ werden läßt. Man erhält sodann

$$A = \frac{F'(a)}{f'(a)} A^2, \quad \text{woraus} \quad A = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Es sei z. B. der Werth des Ausdrucks

$$x^n \log x$$

für $x = 0$ zu bestimmen, n als positiv vorausgesetzt. Man kann diesen Ausdruck wie den Quotienten von $\log x$ durch $\frac{1}{x^n}$ ansehen, welche für $x = 0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt. Die

Differentiation von Zähler und Nenner liefert dagegen den neuen Bruch

$$-\frac{x^n}{n},$$

welcher für $x=0$ den Werth 0 gibt.

Es sei ferner der Werth von

$$\frac{\log x}{x^n}$$

für $x=\infty$ zu bestimmen, n gleichfalls als positiv vorausgesetzt. Die unmittelbare Substitution liefert die Form $\frac{\infty}{\infty}$. Die Differentiation von Zähler und Nenner gibt aber den Bruch

$$\frac{1}{nx^n},$$

woraus für $x=\infty$ der Werth 0 hervorgeht.

Anmerkungen.

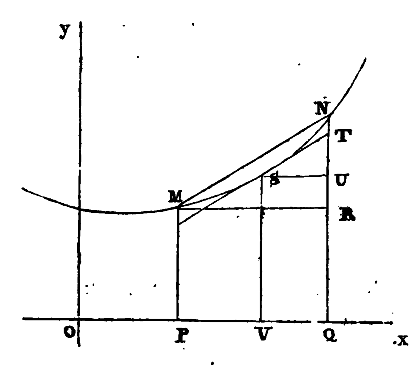
I. Ein paar geometrische Darstellungen analytischer Sätze.

---

1. Wenn $f(x)$ eine Function von x bezeichnet, welche nebst ihrer ersten derivirten Function $f'(x)$ innerhalb der Gränzen x und $x+h$ continuirlich bleibt, so findet nach §. 85 die Beziehung statt

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$

wo θ irgend einen gewissen zwischen 0 und 1 enthaltenen Bruch bedeutet. Diese Gleichung, welche die Taylor'sche Reihe mit ihrem Reste darstellt, sobald man diese Reihe mit ihrem ersten Gliede abbrechen will, kann auf folgende Weise geometrisch abgeleitet werden.



Es sei $f(x) = PM$ die Ordinate einer Curve, deren Abscisse x durch OP dargestellt wird. Man nehme auf der Abscissenachse einen Abschnitt $PQ = h$, so daß $OQ = x+h$ wird; alsdann hat man für die Ordinate QN den Ausdruck $f(x+h)$, und man erhält aus der Figur

$$f(x+h)=f(x)+RN,$$

oder wenn man die Sehne MN zieht

$$f(x+h)=f(x)+h\operatorname{tang} NMR.$$

Nun muß, wegen der vorausgesetzten Continuität der Functionen $f(x)$ und $f'(x)$, auf dem Bogen MN zwischen den Punkten M und N nothwendig sich ein Punkt S der Curve angeben lassen, dessen Tangente ST parallel der Sehne MN ist und folglich mit der Abscissenachse einen Winkel $TSU = NMR$ einschließt. Die Abscisse OV dieses Punktes S ist ein Zwischenwerth zwischen x und $x+h$, welchen man mit $x+\theta h$ bezeichnen kann; die Ordinate VS desselben ist also gleich $f(x+\theta h)$, und die trigonometrische Tangente des Winkels TSU, welchen die Tangente ST mit der Abscissenachse einschließt, hat mithin nach den ersten Entwickelungen der Differentialrechnung den Werth $f'(x+\theta h)$. Man hat also

$$\operatorname{tang} NMR = \operatorname{tang} TSU = f'(x+\theta h)$$

und daraus endlich

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h).$$

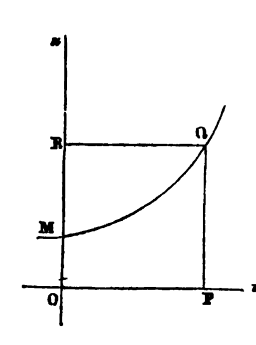
Diese Ableitung hat der im Jahre 1843 verstorbene Major G. W. Müller in seinen Vorlesungen an der Militair-Academie zu Hannover gegeben.

2. Die sogenannte Integration durch Theile beruhet auf der Gleichung §. 260

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

in welcher u und v zwei Functionen der unabhängigen Veränderlichen x bezeichnen. Diese Gleichung kann geometrisch abgeleitet werden wie folgt.

Man denke sich in einer Ebene zwei auf einander



rechtwinklige Achsen, auf welchen von ihrem Durchschnittspunkte *O* aus die Werthe von *u* und *v* abgetragen werden. Die zusammengehörigen Werthe von *u* und *v*, welche einerlei Werthe der unabhängigen Veränderlichen *x* entsprechen, z. B. die Werthe $u = OR$ und $v = OP$, legen die Punkte *Q* einer Curve *MQ* fest, deren Coordinaten diese Werthe selbst sind.

Sucht man die Fläche der Curve *MQ* in Bezug auf die Achse der *v* als Abscissenachse, so hat man darunter den Raum *OPQM* zu verstehen, und man findet

$$OPQM = \int u\, dv,$$

wo das Integral so genommen werden muß, daß es für $v = 0$ verschwindet und bis $v = OP$ sich erstreckt.

Aber diese nämliche Fläche *OPQM* ist auch gleich der Differenz $OPQR - MQR$, und hierin kann *MQR* angesehen werden wie die Fläche der nämlichen Curve *MQ* in Bezug auf die Achse der *u* als Abscissenachse, so daß man hat

$$MQR = \int v\, du,$$

wo das Integral zwischen denselben Gränzen genommen werden muß wie vorhin, also von $u = OM$ bis $u = OR$.

Nun kann das Rechteck *OPQR* ausgedrückt werden durch das Product aus den Coordinaten $OP = v$, und $OR = u$ des Punktes *Q* der Curve. Also geht endlich die Gleichung

$$OPQM = OPQR - MQR$$

in die folgende mit ihr identische Gleichung über

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Diese Ableitung ist von Leibniz gegeben, in der im Jahre 1846 zu Hannover zum ersten Male gedruckten Schrift: **Historia et origo calculi differentialis.**

II. Die Reihe von Lagrange.

---

1. Die Reihen von Taylor und Maclaurin, welche die Entwickelung einer gegebenen Function nach steigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen liefern, können nur unter der Voraussetzung gebraucht werden, daß diese Function als eine entwickelte Function der unabhängigen Veränderlichen gegeben sei. Wenn dagegen eine Function in unentwickelter Gestalt gegeben vorliegt, d. h. wenn bloß eine Gleichung gegeben ist, welche die Beziehung zwischen der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen feststellt, so können auf diese nicht unmittelbar diejenigen Operationen angewandt werden, welche der Gebrauch der Reihen von Taylor und Maclaurin fordert. Ein Fall dieser Art von sehr vielfacher Anwendung wird durch die Gleichung dargestellt

$$y = z + x f(y)$$

in welcher y als unentwickelte Function der unabhängigen Veränderlichen x und z erscheint. Lagrange hat gezeigt, wie man in diesem Falle den Werth von y nach steigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x entwickeln könne, ohne daß es nöthig wird, die gegebene Gleichung zuvor für y aufzulösen.

Man bezeichne mit y', y'', y''', ꝛc. die successiven Differentialverhältnisse der Function y in Bezug auf die unabhängige Veränderliche x genommen, und mit y_0, y_0', y_0'', y_0''', ꝛc. diejenigen Werthe, welche die Function y und ihre Differentialverhältnisse y', y'', y''', ꝛc. annehmen, wenn man darin $x = 0$ setzt. Alsdann kann man nach dem Lehrsatze von Maclaurin die Reihe aufstellen

$$y = y_0 + x . y_0' + \frac{x^2}{2} . y_0'' + \frac{x^3}{2.3} . y_0''' + \dots$$

in welcher die Coefficienten y_0, y_0', y_0'', y_0''', ꝛc. noch zu bestimmen sind. Da nun nach der Voraussetzung die gegebene Gleichung nicht aufgelöst ist, so ist es unmöglich, diese Coefficienten direct zu berechnen. Um sie zu bestimmen, nehme man deshalb die Gleichung $y = z + x f(y)$ wieder auf, und differentiire sie sowol in Bezug auf x als auch in Bezug auf z. Man erhält dadurch

$$y' = f(y) + xy' f'(y), \qquad \frac{dy}{dz} = 1 + x \frac{dy}{dz} f'(y),$$

und wenn man x aus diesen beiden Gleichungen eliminirt

$$y' = \frac{dy}{dz} . f(y). \tag{1.}$$

Ferner hat man allgemein*)

$$\frac{d\left[\frac{dy}{dz} f(y)^n\right]}{dx} = \frac{d^2y}{dx\,dz} . f(y)^n + n . \frac{dy}{dz} . y' f(y)^{n-1} f'(y)$$
$$= \frac{d\,[y' f(y)^n]}{dz}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (1.)

$$\frac{d\left[\frac{dy}{dz} f(y)^n\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{dy}{dz} f(y)^{n+1}\right]}{dz}. \tag{2.}$$

Wenn man jetzt die Gleichung (1.) wiederholt in Be=

*) Zur Abkürzung ist hier $[f(y)]^n$ nur durch $f(y)^n$ bezeichnet worden.

zug auf x differentiirt und dabei beständig von der Gleichung (2.) Gebrauch macht, so folgt

$$y'' = \frac{d\left[\frac{dy}{dz} f(y)\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{dy}{dz} f(y)^2\right]}{dz}$$

$$y''' = \frac{d^2\left[\frac{dy}{dz} f(y)^2\right]}{dx\, dz} = \frac{d^2\left[\frac{dy}{dz} f(y)^3\right]}{dz^2}$$

$$y^{IV} = \frac{d^3\left[\frac{dy}{dz} f(y)^4\right]}{dz^3}$$

. . . .

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{dy}{dz} f(y)^n\right]}{dz^{n-1}}.$$

Und hieraus endlich die Werthe der Coefficienten y_0, y'_0, y_0'', y_0''', 2c. der obigen Reihe abzuleiten, hat man nur noch nöthig in diesen verschiedenen Gleichungen $x=0$ zu setzen. Man bemerke dabei: 1) daß für $x=0$, $y=z$ wird, und 2) daß man, statt von einer Function von x und z das Differentialverhältniß in Bezug auf z zu nehmen und darauf dem x einen besonderen Werth zu geben, man zuerst dem x diesen Werth geben und sodann differentiiren kann. Es wird also

$$y_0 = z$$

$$y_0' = f(z)$$

$$y_0'' = \frac{d\,[f(z)^2]}{dz}$$

$$y_0''' = \frac{d^2[f(z)^3]}{dz^2}$$

. . . .

. . . .

$$y_0^{(n)} = \frac{d^{n-1}\,[f(z)^n]}{dz^{n-1}}$$

und mithin schließlich

$$y = z + x . f(z) + \frac{x^2}{2} . \frac{d[f(z)^2]}{dz} + \frac{x^3}{2.3} . \frac{d^2[f(z)^3]}{dz^2} + \ldots .$$

2. Man kann die vorige Aufgabe noch unter einer allgemeineren Gestalt behandeln, indem man die Forderung stellt, daß aus der gegebenen Gleichung

$$y = z + x f(y)$$

welche y als unentwickelte Function von x und z darstellt, nicht der Werth von y, sondern von irgend einer Function von y, welche mit $F(y)$ bezeichnet werden mag, nach steigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x entwickelt werden soll.

Man bezeichne mit F', F'', F''', ꝛc. die successiven Differentialverhältnisse der Function $F(y)$ in Bezug auf die unabhängige Veränderliche x genommen, und mit F_0, F_0', F_0'', F_0''', ꝛc. diejenigen Werthe, welche die Function $F(y)$ und ihre Differentialverhältnisse F', F'', F''', ꝛc. annehmen, wenn man darin $x = 0$ setzt. Nach dem Lehrsatze von Maclaurin hat man sodann

$$F(y) = F_0 + x . F_0' + \frac{x^2}{2} . F_0'' + \frac{x^3}{2.3} . F_0''' + \ldots .$$

und in dieser Reihe handelt es sich nun um die Bestimmung der Coefficienten F_0, F_0', F_0'', F_0''', ꝛc.

Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit $\frac{dF(y)}{dy}$ oder $F'(y)$, so erhält man

$$F'(y) . y' = F'(y) . \frac{dy}{dz} . f(y)$$

oder

$$F' = \frac{dF(y)}{dz} . f(y). \qquad (3.)$$

Ferner hat man allgemein

$$\frac{d\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^n\right]}{dx} = \frac{d^2F(y)}{dx\,dz}f(y)^n + n.\frac{dF(y)}{dz}.y'f(y)^{n-1}f'(y)$$

$$= \frac{d^2F(y)}{dx\,dz}f(y)^n + n.F'.\frac{dy}{dz}f(y)^{n-1}f'(y)$$

$$= \frac{d[F'f(y)^n]}{dz}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (3.)

$$\frac{d\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^n\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^{n+1}\right]}{dz}. \qquad (4.)$$

Wenn man jetzt die Gleichung (3.) wiederholt in Bezug auf x differentiirt und dabei beständig die Gleichung (4.) beachtet, so folgt

$$F'' = \frac{d\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^2\right]}{dz}$$

$$F''' = \frac{d^2\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^3\right]}{dz^2}$$

. . . .

. . . .

$$F^{(n)} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{dF(y)}{dz}f(y)^n\right]}{dz^{n-1}}.$$

Setzt man endlich in diesen verschiedenen Gleichungen $x = 0$, wodurch $y = z$ wird, so erhält man

$$F_0 = F(z)$$

$$F_0' = F'(z) \,.\, f(z)$$

$$F_0'' = \frac{d\,[F'(z) \,.\, f(z)^2]}{dz}$$

$$F_0''' = \frac{d^2[F'(z) \,.\, f(z)^3]}{dz^2}$$

. . . .

. . . .

$$F_0^{(n)} = \frac{d^{n-1}[F'(z) \,.\, f(z)^n]}{dz^{n-1}}$$

und mithin schließlich

$$F(y) = F(z) + x \,.\, F'(z) \,.\, f(z) + \frac{x^2}{2} \,.\, \frac{d[F'(z) \,.\, f(z)^2]}{dz}$$

$$+ \frac{x^3}{2.3} \,.\, \frac{d^2[F'(z) \,.\, f(z)^3]}{dz^2} + \ldots.$$

Aus dieser Reihe kann die vorige wieder hergeleitet werden, wenn man $F(y) = y$ und folglich $F'(y) = 1$ setzt.

3. Das Theorem von Lagrange, welches in dieser letzten Reihe enthalten ist, läßt noch eine Erweiterung zu, welche Laplace angegeben hat. Wenn nämlich die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen y und x ausdrückt, die Gestalt besitzt

$$y = \varphi\,[z + x\,f(y)]$$

so kann man auch noch in diesem allgemeineren Falle eine beliebige Function von y, welche mit $F(y)$ bezeichnet werden mag, in eine Reihe entwickeln, welche nach steigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen x geordnet ist.

Denn verfolgt man genau den oben bezeichneten Weg,

so wird man zunächst finden, daß die Gleichungen (1.) und (3.) hier noch ungeändert fortbestehen. Folglich gelten auch noch alle diejenigen Gleichungen, welche oben durch Differentiation aus der Gleichung (3.) gezogen worden sind. Setzt man sodann aber $x=0$, so wird $y=\varphi(z)$, und bezeichnet man nun zur Abkürzung die Functionen $F[\varphi(z)]$ und $f[\varphi(z)]$ resp. mit $F_1(z)$ und $f_1(z)$, so erhält man für die Coefficienten der gesuchten Reihe folgende Werthe

$$F_0 = F_1(z)$$
$$F_0' = F_1'(z) \,.\, f_1(z)$$
$$F_0'' = \frac{d\,[F_1'(z) \,.\, f_1(z)^2]}{dz}$$
$$F_0''' = \frac{d^2[F_1'(z) \,.\, f_1(z)^3]}{dz^2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_0^{(n)} = \frac{d^{n-1}\,[F_1'(z) \,.\, f_1(z)^n]}{dz^n}.$$

Mithin wird die gesuchte Reihe selbst

$$F(y) = F_1(z) + x \,.\, F_1'(z) + \frac{x^2}{2} \,.\, \frac{d\,[F_1'(z) \,.\, f_1(z)^2]}{dz} + \frac{x^3}{2.3} \,.\, \frac{d^2\,[F_1'(z) \,.\, f_1(z)^3]}{dz^2} + \ldots.$$

III. Angenäherte Berechnung der Werthe bestimmter Integrale.

Wenn gleich die Methode eben so praktisch wie elegant ist, welche der Verfasser dieses Lehrbuchs, im zweiten Bande §§. 560 und 561, zur angenäherten Berechnung der Werthe bestimmter Integrale mittheilt, so wird es doch zweckmäßig sein, daß auch eine Methode hier eine Stelle finde, welche auf einfacheren Voraussetzungen beruht, indem zu ihrer Entwickelung nur die Kenntniß des Taylor'schen Lehrsatzes gefordert wird.

Es bezeichne $f(x)$ eine gegebene Function von x, welche von $x = a$ bis $x = b$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet, und man fordere die Werthbestimmung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Setzt man für den Augenblick

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

so wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Zerlegt man ferner das Intervall $b - a$ in n gleiche Theile, und setzt

$$\frac{b-a}{n} = \delta,$$

so kann man die Differenz $F(b) - F(a)$ als die Summe der n Differenzen $F(a+\delta) - F(a)$, $F(a+2\delta) - F(a+\delta)$, $F(a+3\delta) - F(a+2\delta)$, ꝛc. darstellen, und wenn man jede dieser Differenzen nach der Taylor'schen Reihe entwickelt, so erhält man

$$F(a+\delta) - F(a) = \delta f(a) + \frac{\delta^2}{2} f'(a) + \frac{\delta^3}{2.3} f''(a)$$

$$F(a+2\delta) - F(a+\delta) = \delta f(a+\delta) + \frac{\delta^2}{2} f'(a+\delta) + \frac{\delta^3}{2.3} f''(a+\delta)$$

$$F(a+3\delta) - F(a+2\delta) = \delta f(a+2\delta) + \frac{\delta^2}{2} f'(a+2\delta) + \frac{\delta^3}{2.3} f''(a+2\delta)$$

. . . .

$$F(b) - F(a+\overline{n-1}.\delta) = \delta f(a+\overline{n-1}.\delta) + \frac{\delta^2}{2} f'(a+\overline{n-1}.\delta) +$$

folglich durch Addition dieser Gleichungen

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\delta\begin{bmatrix} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix} + \frac{\delta^2}{2}\begin{bmatrix} f'(a) \\ +f'(a+\delta) \\ +f'(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f'(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix} + \frac{\delta^3}{2.3}\begin{bmatrix} f''(a) \\ +f''(a+\delta) \\ +f''(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f''(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix}$$

Diese Ausdruck bildet die Grundlage für eine Reihe von Näherungsformeln, welche sich daraus ergeben wie folgt.

1. Man nehme an, die Function $f(x)$ sei von der Beschaffenheit, daß innerhalb jedes der durch δ bezeichneten Intervalle die Werthe von $f(x)$ nahe als constant gelten dürfen, also $f'(x) = 0$ zu setzen sei. Alsdann reducirt sich der vorige Ausdruck einfach auf

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta\begin{bmatrix} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix},$$

welcher Ausdruck zur angenäherten Berechnung eines bestimmten Integrals schon im §. 304 aus anderen Grundlagen entwickelt worden ist. Zu wirklichen Rechnungen wird diese Näherungsformel kaum zu gebrauchen sein, weil die Annäherung, welche sie gibt, viel zu gering ist, wenn man nicht für n einen sehr großen Werth annehmen will.

Man kann sich von dem Grade der Annäherung, welchen diese Formel liefert, sehr leicht auf geometrischem Wege eine Vorstellung verschaffen. Denkt man sich nämlich x wie die Abscisse und $f(x)$ wie die Ordinate einer ebenen Curve, so bedeutet das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

den Flächenraum dieser Curve, welcher zwischen den beiden Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ enthalten ist. Durch die vorstehende Formel wird aber für diesen Flächenraum eine Summe von Rechtecken an die Stelle gesetzt, deren Grundlinien die auf einander folgenden Ordinaten $f(a)$, $f(a+\delta)$, $f(a+2\delta)$, ...$f(a+\overline{n-1}.\delta)$ sind und welche sämmtlich die Größe δ zur Höhe haben. Diese Summe von Rechtecken ist augenscheinlich kleiner als der gesuchte Flächenraum, wenn die Curve innerhalb des gegebenen Intervalles von $x=a$ bis $x=b$ nur steigt; dagegen größer, wenn die Curve innerhalb dieses Intervalles nur fällt.

2. Man nehme an, die Function $f(x)$ sei von der Beschaffenheit, daß innerhalb jedes der durch δ bezeichneten Intervalle die Werthe von $f'(x)$ nahe constant bleiben, also $f''(x)=0$ gesetzt werden dürfe. Alsdann wird der obige Ausdruck

$$\int_a^b f(x)dx = \delta \begin{bmatrix} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix} + \frac{\delta^2}{2} \begin{bmatrix} f'(a) \\ +f'(a+\delta) \\ +f'(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f'(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix}.$$

Diese Formel kann noch erheblich vereinfacht werden, indem es möglich ist die Werthe der Function $f'(x)$ aus ihr wegzuschaffen. Man hat nämlich nach dem Taylor'schen Lehrsatze, und mit Rücksicht auf die gemachte Voraussetzung, daß $f''(x) = 0$ ist,

$$\begin{aligned} f(a+\delta) - f(a) &= \delta f'(a) \\ f(a+2\delta) - f(a+\delta) &= \delta f'(a+\delta) \\ f(a+3\delta) - f(a+2\delta) &= \delta f'(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f(b) - f(a+\overline{n-1}\,.\,\delta) &= \delta f'(a+\overline{n-1}\,.\,\delta) \end{aligned}$$

folglich wenn man diese Gleichungen mit $\frac{\delta}{2}$ multiplicirt und addirt

$$\frac{\delta}{2}[f(b) - f(a)] = \frac{\delta^2}{2} \begin{bmatrix} f'(a) \\ +f'(a+\delta) \\ +f'(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f'(a+\overline{n-1}.\delta) \end{bmatrix}.$$

Die Substitution dieses Werthes gibt

$$\int_a^b f(x)dx = \delta \begin{bmatrix} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ +f(a+\overline{n-1}\,.\,\delta) \end{bmatrix} + \frac{\delta}{2}[f(b) - f(a)]$$

oder einfacher

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ +f(a+\overline{n-1}\,.\,\delta) \\ +\frac{1}{2}f(b) \end{array}\right]$$

als die gesuchte Näherungsformel, welche schon eine stärkere Annäherung gibt als die vorhergehende.

Geometrisch ausgedrückt wird vermöge dieser Formel der Bogen der gegebenen Curve in jedem der durch δ bezeichneten Intervalle durch eine gerade Linie ersetzt, welche mit diesem Bogen einerlei Endpunkte hat. Oder mit anderen Worten, für den gesuchten Flächenraum wird eine Summe von Trapezen an die Stelle gesetzt, deren parallele Grundlinien die auf einander folgenden Ordinaten $f(a)$ und $f(a+\delta)$, $f(a+\delta)$ und $f(a+2\delta)$, ... $f(a+\overline{n-1}\,.\,\delta)$ und $f(b)$ sind und welche sämmtlich die Größe δ zur Höhe haben. Diese Summe von Trapezen ist kleiner als der gesuchte Flächenraum, wenn die Curve ihre concave Seite nach unten wendet; dagegen größer, wenn die Curve ihre convexe Seite nach unten wendet.

3. Die gegebene Function $f(x)$ sei von der Beschaffenheit, daß innerhalb der durch δ bezeichneten Intervalle erst die Werthe von $f''(x)$ nahe als constant angesehen werden dürfen, also $f'''(x) = 0$ zu setzen sei. In diesem Falle hat man

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\delta\left[\begin{array}{l} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f(a+\overline{n-1}\,.\,\delta) \end{array}\right] + \frac{\delta^2}{2}\left[\begin{array}{l} f'(a) \\ +f'(a+\delta) \\ +f'(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f'(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}\right] + \frac{\delta^3}{2.3}\left[\begin{array}{l} f''(a) \\ +f''(a+\delta) \\ +f''(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f''(a+\overline{n-1}. \end{array}\right.$$

Dieser Ausdruck kann wieder vereinfacht werden, indem es möglich ist die Werthe der Function $f''(x)$ daraus fortzuschaffen. Nach dem Taylor'schen Lehrsatze und mit Rücksicht auf die Voraussetzung $f'''(x) = 0$ hat man nämlich

$$\begin{array}{l} f(a+\delta) - f(a) = \delta f'(a) + \frac{\delta^2}{2} f''(a) \\ f(a+2\delta) - f(a+\delta) = \delta f'(a+\delta) + \frac{\delta^2}{2} f''(a+\delta) \\ f(a+3\delta) - f(a+2\delta) = \delta f'(a+2\delta) + \frac{\delta^2}{2} f''(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(b) - f(a+\overline{n-1}.\delta) = \delta f'(a+\overline{n-1}.\delta) + \frac{\delta^2}{2} f''(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}$$

und ebenso

$$\begin{array}{l} f'(a+\delta) - f'(a) = \delta f''(a) \\ f'(a+2\delta) - f'(a+\delta) = \delta f''(a+\delta) \\ f'(a+3\delta) - f'(a+2\delta) = \delta f''(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f'(b) - f'(a+\overline{n-1}.\delta) = \delta f''(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}$$

folglich wenn man die erste dieser beiden Gruppen mit $\frac{\delta}{2}$ und die zweite mit $-\frac{\delta^2}{12}$ multiplicirt und darauf addirt

$$\frac{\delta}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{\delta^2}{12}[f'(b)-f'(a)]=$$

$$\frac{\delta^2}{2}\left[\begin{array}{l} f'(a) \\ +f'(a+\delta) \\ +f'(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f'(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}\right]+\frac{\delta^3}{6}\left[\begin{array}{l} f''(a) \\ +f''(a+\delta) \\ +f''(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f''(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}\right].$$

Die Substitution dieses Werthes in den vorigen Ausdruck gibt

$$\int_a^b f(x)\,dx=$$

$$\delta\left[\begin{array}{l} f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f(a+\overline{n-1}.\delta) \end{array}\right]+\frac{\delta}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{\delta^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

oder einfacher

$$\int_a^b f(x)\,dx=\delta\left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}f(a) \\ +f(a+\delta) \\ +f(a+2\delta) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +f(a+\overline{n-1}.\delta) \\ +\tfrac{1}{2}f(b) \end{array}\right]-\frac{\delta^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

als die gesuchte Näherungsformel.

Die Annäherung, welche diese Formel liefert, ist schon eine sehr erhebliche, ohne daß es nöthig wird für n einen sehr großen Werth zu setzen, und für viele Fälle der Praxis vollkommen ausreichend.

Was die geometrische Bedeutung dieser Näherungs-

formel betrifft, so wird man leicht erkennen, daß in dieser Formel der Bogen der gegebenen Curve in jedem der durch δ bezeichneten Intervalle durch den Bogen einer Parabel ersetzt wird, welcher mit ihm einerlei Anfangspunkt und Endpunkt, und zugleich im Anfangspunkte einerlei Tangente besitzt. Der gesuchte Flächenraum wird mithin hier durch eine Summe von Flächenstreifen dargestellt, welche aus verschiedenen Parabeln durch parallele Linien herausgeschnitten werden, die resp. den Achsen dieser Parabeln parallel sind und unter sich um die Größe δ von einander abstehen.

4. Es erhellet leicht, wie man in dieser Weise fortfahren kann Näherungsformeln zu entwickeln, welche eine immer stärkere Annäherung geben. Da der Gang dieser Entwickelungen hinreichend aus dem Vorigen sich ergiebt, so wird es genügen, daß für die nächsten Fälle nur noch die Resultate hergesetzt werden.

Man nehme $f'''(x)$ als constant oder $f^{IV}(x)=0$ an, so erhält man genau wieder die vorige Formel, woraus hervorgeht, daß die Genauigkeit dieser Formel sich noch einen Schritt weiter erstreckt als die vorige Entwickelung voraussetzte.

Man nehme $f^{IV}(x)$ als constant oder $f^{V}(x)=0$ an, so erhält die vorige Näherungsformel noch das Ergänzungsglied

$$+\frac{\delta^4}{720}\,[f'''(b)-f'''(a)],$$

welches, zu dieser Formel addirt, die Annäherung wieder einen Schritt weiter führt.

Man nehme $f^{V}(x)$ als constant oder $f^{VI}(x)=0$ an, so findet man wieder genau die letzte Formel, deren Genauigkeit sich mithin wieder einen Schritt weiter erstreckt als ihre Entwickelung voraussetzte. Und so fort.

Allgemein wird

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta\left[\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}f(a)\\ +f(a+\delta)\\ +f(a+2\delta)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ +f(a+\overline{n-1}.\delta)\\ +\tfrac{1}{2}f(b)\end{array}\right] - \tfrac{1}{6}\frac{\delta^2}{2}[f'(b)-f'(a)]$$

$$+\tfrac{1}{30}\frac{\delta^4}{2.3.4}[f'''(b)-f'''(a)] - \tfrac{1}{42}\frac{\delta^6}{2.3.4.5.6}[f^V(b)-f^V(a)]+\ldots$$

wo die Coefficienten $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, ꝛc. nichts anderes sind als die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen (s. §. 535).

Geometrisch ausgedrückt hat man in allen diesen Fällen für den Bogen der gegebenen Curve in jedem der durch δ bezeichneten Intervalle sich den Bogen einer parabolischen Curve der dritten, vierten, fünften ꝛc. Ordnung (s. §. 163) an die Stelle gesetzt zu denken, welche mit jenem Bogen einerlei Anfangspunkt und Endpunkt hat und zugleich mit ihm in dem Anfangspunkte resp. eine Berührung der zweiten, dritten, vierten ꝛc. Ordnung eingeht.
